ДЕРЖАВНИЙ КОМІТЕТ СТАТИСТИКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ СТАТИСТИКИ, ОБЛІКУ І АУДИТУ

Л.В.Дериглазов, Т.І.Кисельова
Т.Д. Сакада

В И Щ А
М А Т Е М А Т И К А

Курс лекцій та контрольні завдання
для студентів економічних спеціальностей
(Ч А С Т И Н А П Е Р Ш А)
Видання IV

К И Ї В 2 0 13

УДК
ББК

Дериглазов Л.В., Кисельова Т.І., Сакада Т.Д.
ВИЩА МАТЕМАТИКА. Навчальний посібник.(Ч.1)-Київ, Національна академія статистики, обліку і аудиту, 244 с.

Посібник містить основні розділи вищої математики: вища алгебра; векторна алгебра та аналітична геометрія; диференціальне числення функції однієї змінної. Посібник відповідає тому обсягу знань з вищої математики (перший семестр), яким студент повинен оволодіти для здобуття степеня бакалавра з економіки. Приведені також завдання для самостійного виконання та перевірки знань.

Рекомендується для студентів економічних спеціальностей вузів, викладачів, усім, хто бажає самостійно вивчати курс вищої математики

Рецензенти:
Бабич С.Ю., доктор технічних наук, професор;
Муратов М..А., доктор фізико-математичних наук, професор.

Рекомендовано до друку вченою радою Національної академії статистики, обліку і аудиту (протокол № 3 від 31.10.2012 року)

ISBN 966-580-138-4

Л.В.Дериглазов, Т.І.Кисельова, Т.Д.Сакада, 2013
Національна академія статистики, обліку і аудиту Держкомстату України,2013

ЗМІСТ

Передмова			
Розділ	*I*	***Елементи вищої алгебри***	6
	1.1	Визначники. Основні поняття	6
	1.2	Властивості визначників	8
	1.3	Матриці і дії над ними	10
	1.4	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	15
	1.5	Способи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	16
	1.6	Тести	21
Розділ	*II*	***Векторна алгебра***	34
	2.1	Вектор. Основні поняття про вектори	34
	2.2	Додавання векторів. Метод ламаної лінії	36
	2.3	Додавання векторів. Правило паралелограма	36
	2.4	Віднімання векторів	37
	2.5	Множення вектора на число	38
	2.6	Скалярний добуток двох векторів	38
	2.7	Векторний добуток двох векторів	40
	2.8	Мішаний добуток трьох векторів	42
	2.9	Координати вектора	45
	2.10	Вираз суми і різниці векторів через їх координати	48
	2.11	Вираз добутку скаляра і вектора через координати вектора	48
	2.12	Поділ відрізка в даному відношенні	49
	2.13	Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати	50
	2.14	Вираз векторного добутку векторів через їх координати	51
	2.15	Вираз мішаного добутку через координати векторів-співмножників	53
	2.16	Тести	56
Розділ	*III*	***Елементи аналітичної геометрії***	63
	3.1	Рівняння лінії на площині	63
	3.2	Рівняння прямої лінії на площині	64
	3.3	Кут між двома прямими на площині	71
	3.4	Криві лінії другого порядку	76
	3.5	Коло	76
	3.6	Еліпс	77
	3.7	Гіпербола	79
	3.8	Парабола	81
	3.9	Рівняння площини у просторі	82
	3.10	Пряма лінія у просторі	82
	3.11	Пряма і площина	87
	3.12	Вправи на закріплення	89
	3.13	Вправи для самостійного розв’язку	93
Розділ	*IV*	***Функція. Основні поняття***	97
	4.1	Функція. Означення. Область визначення і область значень функцій	97
	4.2	Основні способи задання функції	98
	4.3	Парність і непарність функції	100
	4.4	Періодичність функції	101
	4.5	Обмеженість функції	

	4.6	Монотонність функції	103
	4.7	Проміжки знакосталості і корені функції	105
	4.8	Точки мінімуму і точки максимуму функції. Екстремум функції	106
	4.9	Обернена функція	107
	4.10	Основні елементарні функції	108
	4.11	Лінійна функція і її графік	110
	4.12	Функція $y = \frac{k}{x}$ і її графік	113
	4.13	Квадратична функція і її графік	115
	4.14	Функція $y = x^3$ і її графік	117
	4.15	Степенева функція з натуральним показником $y = x^n,\ n \in N$	117
	4.16	Степенева функція з цілим від'ємним показником ($y = x^{-n},\ n \in N$)	118
	4.17	Функція $y = \sqrt{x}$ і її графік	119
	4.18	Функція $y = \sqrt[3]{x}$ і її графік	120
	4.19	Функція $y = \sqrt[n]{x}$ і її графік	120
	4.20	Функція $y = \lvert x \rvert$ і її графік	121
	4.21	Геометричне перетворення графіків функції	122
Розділ	*V*	***Границя***	130
	5.1	Числова послідовність	130
	5.2	Границя числової послідовності	131
	5.3	Нескінченно малі числової послідовності	134
	5.4	Нескінченно великі числової послідовності	137
	5.5	Основні теореми про границі	139
	5.6	Границя змінної та її властивості	142
	5.7	Границя функції в точці	143
	5.8	Неперервність і точки розриву функції	144
	5.9	Ознаки існування границі змінної величини	147
	5.10	Основні теореми про границі змінної величини	147
	5.11	Дві чудові границі	149
	5.12	Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих величин	152
Розділ	*VI*	***Диференціальне числення функції однієї змінної***	154
	6.1	Деякі задачі, що приводять до поняття похідної	154
	6.2	Означення похідної та деякі її інтерпретації	156
	6.3	Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції	157
	6.4	Означення диференціала	157
	6.5	Знаходження похідних першого порядку. Основні правила диференціювання	157
	6.6	Диференціювання неявно заданих функцій	159
	6.7	Похідні основних елементарних функції	160
	6.8	Диференціювання функцій, що задані параметрично	162
	6.9	Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій	163
	6.10	Логарифмічне диференціювання	164
	6.11	Правила та формули для обчислення похідних	165

	6.12	Похідні і диференціали вищих порядків	166
	6.13	Основні теореми диференціального числення	167
	6.14	Приклади з економічним змістом	170
	6.15	Вправи	173
Розділ	*VII*	***Застосування основних понять диференціального числення при досліджені функції***	179
	7.1	Неперервність і точки розриву функції	179
	7.2	Правило Лопіталя	184
	7.3	Застосування диференціального числення для дослідження функції і побудови її графіка	186
	7.4	Використання поняття похідної в економічних розрахунках	195
	7.5	Еластичність функції	197
Розділ	*VIII*	***Контрольні завдання***	200
Розділ	*IX*	***Довідковий матеріал***	219
		Література	244

РОЗДІЛ 1 Елементи вищої алгебри

§1.1 Визначники. Основні поняття

Означення 1. Вираз $a_{11}a_{22}$ - $a_{12}a_{21}$ складений із елементів таблиці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

називається *визначником (детермінантом)* другого порядку і позначається:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

a_{ij} - елементи визначника, перший індекс означає номер рядка, другий - номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент.

Діагональ зліва вниз направо називається головною діагоналлю, інша діагональ називається побічною.

Отже, значення детермінанта другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

Приклад . Обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 5=6-35=-29$$

Означення 2. Вираз

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$

складений з елементів квадратної таблиці

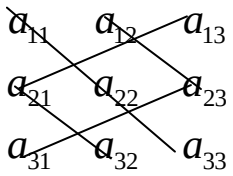
$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

називається *визначником* третього порядку і позначається:

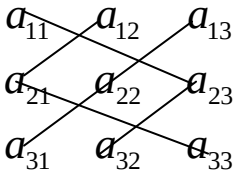
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Отже, визначник третього порядку є алгебраїчною сумою шести доданків, кожен з яких є добутком трьох елементів, узятих по одному з кожного стовпця і кожного рядка з певним знаком.

Правило обчислення визначника третього порядку можна записати у вигляді двох таблиць:



а)



б)

(1.6)

В таблиці а) лініями з'єднані ті елементи, добуток яких береться із знаком "плюс", а в таблиці б) лініями з'єднані ті елементи, добуток яких береться із знаком "мінус".

Приклад: Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 3 + (-1)\cdot 5\cdot 1 -$$

$$-(-1)\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 1 = 28 - 28 = 0$$

Визначник *n*-го порядку є алгебраїчною сумою $n!$ доданків, кожен з яких є добутком *n* елементів, узятих по одному із кожного стовпця і кожного рядка із знаком, який визначається за певним правилом, що враховує розташування узятих елементів. Позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

Означення 3. *Транспонуванням* визначника називається таке його перетворення, при якому рядки визначника стають стовпцями з тими ж самими номерами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{\tau} \tag{1.8}$$

§1.2 Властивості визначників

1. Визначник не змінюється при його транспонуванні. Це означає, що величина визначника не зміниться, якщо рядки (стовпці) замінити відповідними стовпцями (рядками). Тобто, рядки і стовпці визначника рівноправні. Тому всі наступні властивості, які сформульовані для рядків, справджуються також і для стовпців.

2. Якщо будь-який рядок визначника складається з одних нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (необов'язково сусідні), то зміниться знак визначника на протилежний.

4. Якщо визначник містить два однакові рядки, то він дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи деякого рядка визначника помножити на довільне число, то сам визначник помножиться на це число.

6. Визначник, який містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного з його рядків додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне й те саме число.

Означення 4. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника *n*-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий викреслюванням у заданому визначнику *i*-го рядка *j*-го стовпця.

Наприклад, виберемо елемент a_{23} у визначнику третього порядку. Тоді у визначнику необхідно викреслити другий рядок (перший індекс) та третій стовпчик (другий індекс). З елементів, що залишилися, формуємо визначник другого порядку (порядок на одиницю менший за початковий)

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Означення 5. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} називається мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1.9}$$

Теорема 1 (про розкладання визначника). Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення цих елементів.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathrm{A}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{A}_{ij} \tag{1.10}$$

Для обчислення визначників $n \geq 3$ користуються властивостями визначників та теоремою про розкладання визначника, яка дозволяє перейти до обчислення визначника нижчого порядку.

Приклад . Обчислимо визначник 4-го порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Для кожного рядка, або стовпця можна записати формулу (1.10). Тому, серед рядків і стовпців вибирають той, в якому найбільше нульових елементів. В нашому випадку – це другий стовбець, або четвертий рядок, що містять по два нульових елемента. Це дає змогу не обчислювати відповідні алгебраїчні доповнення. Якщо “нулі” відсутні, то застосовують властивість №7. При цьому найзручніше, якщо ***ведучий*** елемент дорівнює 1. Виберемо за ведучий елемент a_{11}=1, і перетворимо всі інші елементи першого стовпця в нуль.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} III_P - 2 \cdot I_P \\ IV_P - 3 \cdot I_P \end{matrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -9 \end{vmatrix}$$

Вираз в дужках $\langle\ \rangle$ необхідно розуміти як підказка тих дій, які були виконані при перетворені визначника:

- від елементів третього рядка відняли відповідні елементи першого рядка помножені на 2;
- від елементів четвертого рядка відняли відповідні елементи першого рядка помножені на 3

Розкладемо визначник за елементами 1-го стовпця

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} + a_{41}\cdot A_{41} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} = A_{11}$$

$$\Delta = (-1)^{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -4 \\ -6 & -2 & -9 \end{vmatrix} = 9+48+8-6-72-8 = -21.$$

Відповідь: -21.

Якщо в даному визначнику розглянути четвертий рядок, то за ведучий елемент можна взяти елемент $a_{43} = 1$ і виконати одну дію, перетворивши елемент a_{41} в нуль

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left\langle I_C - 3\cdot III_C \right\rangle = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ -6 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{41}\cdot A_{41} + a_{42}\cdot A_{42} + a_{43}\cdot A_{43} + a_{44}\cdot A_{44} = 0\cdot A_{41} + 0\cdot A_{42} + 1\cdot A_{43} + 0\cdot A_{44} = A_{43}$$

$$\Delta = (-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4+0+2-3-0-24 = -21$$

§1.3 Матриці і дії над ними

Означення 6. *Числовою матрицею розміру* $m\times n$ називається множина $m\cdot n$ чисел (елементів матриці), розміщених у вигляді прямокутної таблиці, яка складається із *m* рядків та *n* стовпців. Матриця записується у вигляді:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \text{або} \quad \mathrm{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & a_{2m} \\ & & a_{11} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nm} \end{Vmatrix}; \quad \mathrm{A}_{m\times n} = \left(a_{ij}\right) \qquad (1.11)$$

Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною.*

Означення 7. *Одиничною матрицею* називається квадратна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а решта елементів дорівнює нулю:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Означення 8. *Сумою двох матриць* однакового розміру $\mathrm{A}_{m\times n} = (a_{ij})$ і $\mathrm{B}_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$, елементи якої дорівнюють алгебраїчній сумі елементів матриць *A* і *B:* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Позначення: $C = A + B$

Означення 9. *Добутком матриці A на число* λ називається матриця *B,* усі елементи якої є добутками відповідних елементів матриці *A* на задане число λ. Позначення:

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}\lambda = \lambda\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

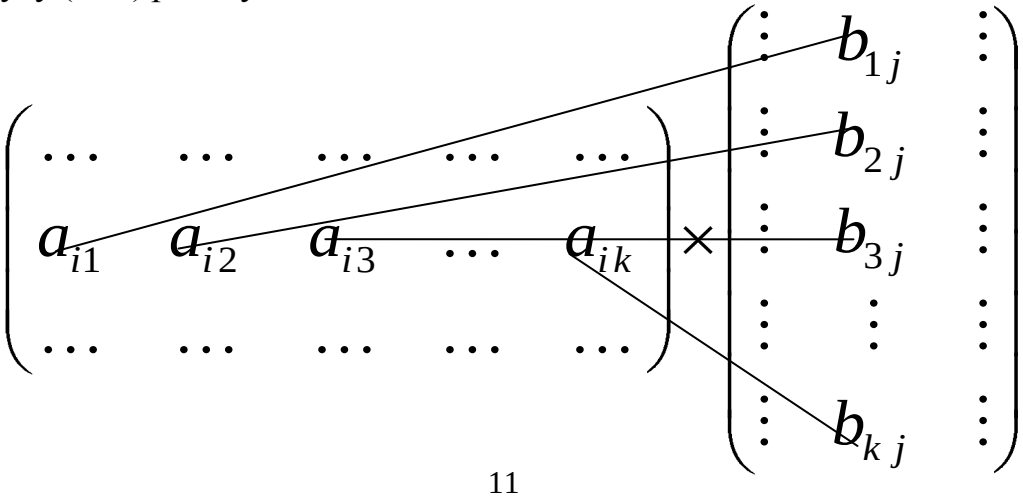
Матриці $A_{m\times k}$ і $B_{k\times n}$, називаються ***узгодженими***, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. При цьому матриці $B_{k\times n}$ і $A_{m\times k}$ в *загальному випадку* ***можуть бути*** *не узгодженні*(як в наведеному прикладі).

Означення 10. *Добутком двох узгоджених матриць* $\mathrm{A}_{m\times k} = (a_{ij})$ і $\mathrm{B}_{k\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$ яка має *m* рядків і *n* стовпців і довільний член якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідний елемент *j*-го стовпця матриці *B:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \tag{1.14}$$

Позначають добуток матриць так : $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$.

Формулу (1.14) реалізують за схемою



Приклад . Обчислити *AB* і *BA,* якщо

$$\mathrm{A}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\0\,1\,2\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$

$c_{11}=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3=14$ $\qquad c_{12}=1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 0=3$

$c_{21}=0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3=8$ $\qquad c_{22}=0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 0=1$

Отже, результат можна записати у вигляді

$$A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\0\,1\,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\,1\\2\,1\\3\,0\end{pmatrix}=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}14&3\\8&1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток $B\cdot A$:

$$B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=D_{3\times 3}=\begin{pmatrix}d_{11}&d_{12}&d_{13}\\d_{21}&d_{22}&d_{23}\\d_{31}&d_{32}&d_{33}\end{pmatrix}$$

$d_{11}=1\cdot 1+1\cdot 0=1;$ $\quad d_{12}=1\cdot 2+1\cdot 1=3;$ $\quad d_{13}=1\cdot 3+1\cdot 2=5;$

$d_{21}=2\cdot 1+1\cdot 0=2;$ $\quad d_{22}=2\cdot 2+1\cdot 1=5;$ $\quad d_{23}=2\cdot 3+1\cdot 2=8;$

$d_{31}=3\cdot 1+0\cdot 0=3;$ $\quad d_{32}=3\cdot 2+0\cdot 1=6;$ $\quad d_{33}=3\cdot 3+0\cdot 2=9.$

$$B_{3\times 2}\cdot A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}=D_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $AB=\begin{pmatrix}14&3\\8&1\end{pmatrix};\ BA=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}.$

Зауваження. З наведеного прикладу видно, що для добутку двох матриць комутативний закон у загальному випадку не виконується, тобто $\mathrm{AB}\neq\mathrm{BA}$.

Означення 11. Матриця *B* називається *оберненою* до матриці *A,* якщо виконується рівність: $\mathrm{AB}=\mathrm{E}$, де E - одинична матриця.

Обернену матрицю позначають символом A^{-1} тобто $B = A^{-1}$ і $AA^{-1} = E$.

Теорема 2. Для того, щоб матриця *A* мала обернену необхідно і достатньо, щоб її визначник не дорівнював нулю.

Зауваження. Обернена матриця існує лише для квадратної матриці, визначник якої не дорівнює нулю (не вироджена матриця).

Правило. *Щоб знайти обернену матрицю, необхідно знайти алгебраїчні доповнення кожного її елемента та побудувати транспоновану матрицю з них і кожен її елемент поділити на значення визначника початкової матриці A*:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

Приклад . Знайти обернену матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Розв'язання: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 2 - 0 + 3 - 8 = 5 \neq 0$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 2) = 10$,

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 + 0) = 4$,

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 0 = 12$,

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 2) = 1$,

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 = -1$, $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 0) = -3$,

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$.

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}. \qquad \textit{Відповідь:}\ \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4/5 & -1/5\\ 2 & 12/5 & -3/5\\ 0 & 1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

Означення 12. *Мінором* порядку *к* матриці *A* називається визначник *k* - го порядку, складений із елементів матриці *A,* що стоять на перетині довільних її *k* рядків і *k* стовпців.

Означення 13. *Рангом матриці A* називається найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці. Зрозуміло, що найбільше значення рангу матриці $A_{m\times n}$ може набувати значення меншого із чисел $m\ i\ n$.

Ранг матриці можна обчислювати за допомогою *елементарних перетворень*, що не змінюють ранг матриці:

- множення будь-якого рядка (стовпця) на число, що не дорівнює нулю;
- додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), помножених на довільне число;
- перестановка місцями двох рядків чи стовпців.

Матриці, які мають одинакові ранги, називаються *еквівалентними.* Перехід до еквівалентної матриці позначають знаком **«~»(«тильда»).**

За допомогою таких перетворень будь-яку матрицю можна звести до трапеціївидної. Ранг трапеціївидної матриці дорівнює числу рядків, які містять ненульові елементи.

Приклад: Обчислити ранг матриці $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 3\\ 1 & 6 & -6 & 3\end{pmatrix}$

Розв'язання: Проведемо елементарні перетворення з матрицею, звівши всі елементи до одиниці або нуля. Як і раніше, в дужках $\langle\ \rangle$ записуємо дії, які проводимо з рядками або стовпцями матриці:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 3\\ 1 & 6 & -6 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}II_P-2\cdot I_P\\ III_P-I_P\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 5 & -1\\ 0 & 4 & -5 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\langle III_P+II_P\rangle\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}II_C-2\cdot I_C\\ III_C+I_C\\ IV_C-2\cdot I_C\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}II_C-4\cdot IV_C\\ III_C+5\cdot IV_C\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Найбільший порядок визначника, значення якого відмінне від нуля, дорівнює 2, отже ранг матриці A дорівнює 2. *Відповідь:*. $r_A = 2$.

§1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення 15. *Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)* називається система, яка має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.16)$$

де x_j (j = 1, 2, ... , n) - невідомі, a_{ij} - коефіцієнти при невідомих,

b_i (i = 1, 2, ... , m) - вільні члени.

Розв'язком системи називається упорядкована множина чисел $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$, яка перетворює кожне рівняння системи в вірні числові тотожності.

Означення 16. Система називається *сумісною,* якщо вона має хоча б один розв'язок.

Означення 17. Сумісна система називається *визначеною,* якщо вона має тільки один розв'язок, і *невизначеною,* якщо вона має безліч розв'язків.

Означення 18. Система називається *несумісною,* якщо вона не має жодного розв'язку.

Означення 19. Матриця, утворена з коефіцієнтів при невідомих, називається *матрицею системи:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

Означення 20. Матриця, утворена з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів називається *розширеною матрицею системи:*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

В літературі зустрічається і таке позначення розширеної матриці A_B

Позначимо X - матрицю-стовпчик невідомих, а B - матрицю-стовпчик вільних членів:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Тоді систему рівнянь можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B \tag{1.20}$$

Теорема 3. (Кронекера - Капеллі.) Система лінійних рівнянь тоді і тільки тоді сумісна, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці:

$$r(A) = r(\tilde{A}) \tag{1.21}$$

Теорема 4. (Кронекера - Капеллі. Критерій визначеності.) Для того, щоб сумісна система лінійних рівнянь була визначеною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці коефіцієнтів дорівнював числу невідомих:

$$r(A) = r(\tilde{A}) = r = n \tag{1.22}$$

При розв'язанні системи рівнянь можна застосувати такі перетворення, які не змінюють розв'язків системи (еквівалентні перетворення):

1) множити будь-яке рівняння на довільне число, що не дорівнює нулю;
2) додавати до одного рівняння інше, помножене на довільне число;
3) міняти місцями рівняння.

§1.5 Способи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

1) *Формули Крамера.**(Застосовується у випадку, якщо число невідомих дорівнює числу рівнянь)***

Означення 21. Визначник, складений з коефіцієнтів СЛАР називається *головним* визначником системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

Означення 22. Визначник, отриманий з головного визначника системи шляхом заміни елементів *к-го* стовпця відповідними вільними членами називається *допоміжним* визначником системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ b_2\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_1\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ b_2\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ b_n\ldots a_{nn} \end{vmatrix},\ldots,\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ldots b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots b_n \end{vmatrix} \tag{1.24}$$

Якщо головний визначник квадратної лінійної системи не дорівнює нулю, то така система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.25}$$

Приклад:

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ 8x_1 + 3x_2 + 10x_3 = -7 \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо головний і три допоміжні визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 46, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & -3 & -4 \\ 4 & 4 & 6 \\ -7 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -46,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 92, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 1 & 4 & -4 \\ 8 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -23,$$

Тоді розв'язок системи знайдемо за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-46}{46} = -1 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{92}{46} = 2 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-23}{46} = \frac{1}{2}$$

Підставляючи знайдений розв’язок в початкову систему, пересвідчуємося, що кожне з рівнянь системи перетворюється в вірну числову тотожність.

Відповідь: (-1; 2; -1/2).

2) *Матричний метод* розв'язання СЛАР, головний визначник якої відмінний від нуля:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

В матричній формі ця система має вигляд рівняння $AX = B$. Розв'язком такого рівняння буде матриця-стовбець

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad (1.26)$$

де A^{-1} - обернена матриця до матриці A.

Приклад:

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

Розв'язання. СЛАР запишемо в матричному вигляді:

$$AX = B \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -16 \\ -5 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $\left(-\frac{16}{3};\ -\frac{5}{3};\ \frac{28}{3}\right)$

3) *Метод Гауса* розв'язання СЛАР - ***метод послідовного виключення невідомих*** можна застосувати до будь-якої системи лінійних рівнянь. Нехай дана система трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Перетворимо систему, виключаючи невідоме x_1 з усіх рівнянь крім першого. Для цього друге рівняння помножимо на $\frac{a_{11}}{a_{21}}$. Даною операцією вирівнюються коефіцієнти в першому і другому рівняннях при x_1. Від другого рівняння віднімемо перше. Провівши аналогічну операцію з третім рівнянням, отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

Наступним кроком виключимо невідоме x_2 з третього рівняння за допомогою другого рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

Отримаємо систему, розв'язувати яку досить легко: з останнього рівняння знаходимо x_3, підставляємо його значення в друге рівняння, з якого знаходимо x_2, і далі, підставляючи значення x_3 і x_2 в перше рівняння, знаходимо x_1.

Замість перетворення системи рівнянь можна виконувати відповідні перетворення розширеної матриці системи таким чином, щоб вона набула трапецієвидної форми. Саме в цьому полягає розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гауса.

Приклад. Розв'язати систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Розв'язання: Із коефіцієнтів системи і вільних членів складемо розширену матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix}$$

Від другого рядка віднімемо перший, а від третього віднімемо перший, помножений на три:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -3 & 10 & 19 \end{pmatrix}$$

Тепер від третього рядка віднімемо другий:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

За елементами перетвореної розширеної матриці записуємо систему лінійних рівнянь. З останнього рівняння знаходимо x_3, підставляємо його значення в друге рівняння, з якого знаходимо x_2, і далі, підставляючи значення x_3 і x_2 вперше рівняння знаходимо x_1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -8x_3 = 8x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5 = -9, \\ -3x_2 + 2 = 11, \\ x_3 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 6 = -4, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = -1, \end{cases}$$

Відповідь: (2; -3 ;-1).

ТЕСТИ

ТЕМА: *ВИЗНАЧНИКИ, МАТРИЦІ, СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.*

1.Визначник –це
- число
- таблиця
- число, знайдене за деяким правилом
- матриця
- не знаю

2.Порядок визначника визначається
- кількістю його рядків
- кількістю його стовпців
- добутком кількості рядків на кількість стовпців
- сумою кількості рядків і стовпців
- не знаю

3.У визначнику кількість рядків і стовпців
- рівна
- різна
- може бути рівною
- може бути різною
- для визначника їх кількість може бути довільною
- не знаю

4.Індекси в елементі визначника a_{ij} прочитуються як
- одне число
- два числа
- один символ
- не знаю

5.Індекси в елементі визначника a_{ij} визначають
- номери рядка і стовпця
- порядковий номер елемента
- порядковий номер від'ємного елемента
- порядковий номер додатного елемента
- порядковий номер нульового елемента
- не знаю

6.Перший індекс в елементі визначника a_{ij} визначає
- порядковий номер елемента
- номер стовпця
- номер рядка
- індекси не можна розбивати
- не знаю

7.Другий індекс в елементі визначника a_{ij} визначає

- порядковий номер елемента
- номер стовпця
- номер рядка
- індекси не можна розбивати
- не знаю

8.Якщо порядок визначника n, то кількість елементів визначника знаходиться за формулою

- $2 \cdot n$
- $(n+1)n$
- $n \times n$
- n^2
- $n(n+1)+1$
- не знаю

9.Значення визначника другого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ знаходиться за формулою

- $(a_{11}+a_{22})(a_{21}-a_{12})$
- $a_{11}a_{22}+a_{21}a_{12}$
- $-a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$
- $(1+1)a_{11}+(2+2)a_{22}-(2+1)a_{21}-(1+2)a_{12}$
- не знаю

10. Значення визначника третього порядку знаходиться за правилом

- трикутників
- прямокутників
- ломаних ліній
- квадратів
-Саррюса

11.При заміні рядків відповідними стовпцями значення визначника

- зміниться на протилежне
- зміниться на обернене
- не зміниться
- збільшиться в два рази
- зменшиться в два рази

12.При перестановці місцями двох сусідніх рядків значення визначника

- не зміниться
- зміниться довільним чином
- зміниться на протилежне
- зміниться на обернене
- не знаю

13.При перестановці місцями двох сусідніх стовпців значення визначника
- не зміниться
- зміниться довільним чином
- зміниться на протилежне
- зміниться на обернене
- не знаю

14.Якщо у визначнику один з рядків складається тільки з нулів, то
- даний рядок і будь-який стовбець можна викреслити
- визначник дорівнює сумі ненульових елементів
- значення визначника невизначене
- визначник дорівнює нулю
- визначник дорівнює сумі добутків ненульових елементів стовпців
- не знаю

15.Якщо у визначнику один із стовпців складається тільки з нулів, то
- даний стовбець і будь-який рядок можна викреслити
- визначник дорівнює сумі ненульових елементів
- значення визначника невизначене
- визначник дорівнює нулю
- визначник дорівнює сумі добутків ненульових елементів рядків
- не знаю

16.Якщо визначник має два однакових стовпці, то
- визначник дорівнює сумі інших елементів
- визначник дорівнює добутку інших елементів
- значення визначника необхідно знаходити за загальним правилом
- визначник дорівнює нулю
- не знаю

17.Якщо визначник має два однакових рядки, то
- визначник дорівнює сумі інших елементів
- визначник дорівнює добутку інших елементів
- значення визначника необхідно знаходити за загальним правилом
- визначник дорівнює нулю
- не знаю

18.Якщо у визначнику елементи деякого рядка мають спільний множник, то
- визначник дорівнює нулю
    - спільний множник можна виносити за знак визначника множником у відповідній степені
- спільний множник можна виносити за знак визначника множником
- визначник дорівнює добутку спільного множника на порядок визначника
- не знаю

19. Якщо у визначнику елементи деякого стовпця мають спільний множник, то
- визначник дорівнює нулю
    - спільний множник можна виносити за знак визначника множником у відповідній степені
- спільний множник можна виносити за знак визначника множником
- визначник дорівнює добутку спільного множника на порядок визначника
- не знаю

20. Якщо у визначнику елементи двох рядків пропорційні, то
- визначник дорівнює нулю
- визначник дорівнює добутку непропорційних елементів
- визначник дорівнює добутку коефіцієнта пропорційності на порядок визначника
- не знаю

21. Якщо у визначнику до елементів одного рядка додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне й те саме число, то
- значення визначника зміниться на величину множника
- значення визначника зміниться в два рази
- визначник дорівнює нулю
- значення визначника не зміниться
- отримаємо абсолютно інший визначник

22. Якщо у визначнику до елементів одного стовпця додати відповідні елементи іншого стовпця, помножені на одне й те саме число, то
- значення визначника зміниться на величину множника
- значення визначника зміниться в два рази
- визначник дорівнює нулю
- значення визначника не зміниться
- отримаємо абсолютно інший визначник

23. Якщо у визначнику до елементів одного стовпця додати відповідні елементи відповідного рядка, помножені на одне й те саме число, то
- значення визначника зміниться на величину множника
- значення визначника зміниться в два рази
- визначник дорівнює нулю
- значення визначника не зміниться
- отримаємо абсолютно інший визначник

24. Мінором елемента визначника називається
- відповідний рядок визначника
- відповідний стовбець визначника
- число, обернене до елемента
- той-же визначник із заміною елемента нулем
- визначник з меншим на одиницю порядком
- визначник з меншим на дві одиниці порядком

25. Мінор елемента a_{ij} визначника позначається
- A_{ij}
- A_i^j
- M_{i+j}
- M_{ij}
- Δ_{ij}

26. Мінор елемента a_{ij} формується із початкового визначника шляхом
- викреслювання i – го та j – го рядків
- викреслювання i – го та j – го стовпців
- викреслювання i – го рядка та j – го стовпця
- викреслювання i – го стовпця та j – го рядка
- не знаю

27. Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника позначається
- AD_{ij}
- A_{ij}
- Δ_{ij}
- M_{ij}
- не знаю

28. Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника знаходиться за формулою
- $=(-1)^{ij} M_{ij}$
- $=(-1)^{i+j} M_{ij}$
- $=(-1)^{i-j} M_{ij}$
- $=-(1)^{ij} M_{ij}$
- $=-(-1)^{i-j} M_{ij}$

29. Значення визначника дорівнює
- сумі добутків елементів якого-небудь рядка на їхні алгебраїчні доповнення
- сумі добутків елементів якого-небудь рядка на їхні мінори
- сумі добутків елементів якого-небудь рядка на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка
- сумі добутків елементів якого-небудь стовпця на алгебраїчні доповнення відповідних елементів відповідного рядка
- не знаю

30. Визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ дорівнює
- $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$
- $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31} + a_{14}A_{41}$
- $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} + a_{14}A_{34}$
- $a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} + a_{14}M_{14}$
- $a_{11}M_{11} + a_{12}M_{21} + a_{13}M_{31} + a_{14}M_{41}$
- не знаю

31. Який із виразів буде лінійним відносно невідомих x_m?

- $a \cdot x_1 - b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = x_1 x_2 x_3$
- $a \cdot x_1 - b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d x_1 x_2$
- $a \cdot x_1 \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$
- $a \cdot x_1 - b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$
- $a \cdot x_1 - b \cdot x_2 + c \cdot x_3 - d x_1 x_2 x_3 = q$

32. Яка із систем є лінійною системою відносно невідомих?

- $\begin{cases} ax - by + z^{-1} = m_1 \\ x + y + z = 1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax - by + z^2 = m_1 \\ xy + z = 1 \\ 5x - 2y + z = 10 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax - by + c^2 z = m_1 \\ px^2 + qy + rz = m_2 \\ kx - ly + nz = m_3 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax - by + cz = m_1 \\ pxyz = m_2 \\ kx - ly + nz = m_3 \end{cases}$
- $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \end{cases}$

33. Правило Крамера можна застосовувати до

- будь-якої системи
- будь-якої системи лінійних рівнянь
- системи, в якій число невідомих більше ніж число рівнянь
- системи, в якій число невідомих менше ніж число рівнянь
- системи, в якій число невідомих рівне числу рівнянь
- не знаю

34. При застосуванні правила Крамера необхідно сформувати та обчислити

- головний (Δ) та допоміжний ($\tilde{\Delta}$) визначники
- головний визначники (Δ) та допоміжні (Δ_i) визначники
- головні визначники
- не знаю

35. При формуванні допоміжних визначників

- замінюють рядки
- замінюють стовпці
- замінюють одночасно і рядки і стовпці
- замінюють діагональні елементи
- не знаю

36. При побудові допоміжного визначника
- в головному визначнику замінюють стовбець коефіцієнтів при відповідному невідомому стовпцем вільних членів
- в головному визначнику замінюють рядок коефіцієнтів стовпцем вільних членів
- замінюють діагональні елементи
- не знаю

37. Правило Крамера можна записати так
- $x_m = \frac{\Delta}{\Delta_m}$
- $x_m = \frac{\Delta_m}{\Delta}$
- $x_m = \Delta_m \cdot \Delta$
- $x_m = \Delta \cdot \sqrt{\Delta_m}$
- не знаю

38. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має один розв’язок якщо
- сума допоміжних визначників дорівнює нулю
- головний визначник дорівнює нулю
- головний визначник не дорівнює нулю
- всі визначники одночасно дорівнюють нулю
- допоміжні визначники не дорівнює нулю
- не знаю

39. Система лінійних алгебраїчних рівнянь не має розв’язку якщо
- сума всіх визначників дорівнює нулю
- головний визначник дорівнює нулю, а хоча б один допоміжний визначник не дорівнює нулю
- головний визначник не дорівнює нулю
- всі визначники одночасно дорівнюють нулю
- допоміжні визначники не дорівнює нулю
- не знаю

40. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв’язків якщо
- сума всіх визначників дорівнює нулю
- головний визначник дорівнює нулю, а хоча б один допоміжний визначник не дорівнює нулю
- головний визначник не дорівнює нулю
- всі визначники одночасно дорівнюють нулю
- допоміжні визначники не дорівнює нулю
- не знаю

41. Матрицею називають
- квадратну таблицю елементів
- прямокутну таблицю елементів
- число
- множину елементів
- не знаю

42. Матрицю позначають

- $A=\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$
- $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$
- $A=\left\langle \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\rangle$
- не знаю

43. Розмір матриці – це
- сума кількості рядків та стовпців
- добуток кількості рядків та стовпців
- ранг матриці
- не знаю

44. Розмір матиці позначають так
- B_{mn}
- $A_{m\times n}$
- C_m^n
- $D(m;n)$
- не знаю

45. Якій матриці ставлять у відповідність визначник?
- будь-якій прямокутній
- тільки квадратній
- жодній
- не знаю

46. Нульова матриця – це
- матриця хоча б з одним «нульовим» рядком
- матриця хоча б з одним «нульовим» стовбцем
- матриця з «нульовими» діагоналями
- матриця, у якій всі елементи дорівнюють нулю
- матриця, у якій більше половини елементів дорівнюють нулю

47. Символ Кронекера – це

- $\delta_{ij} = \begin{cases} i + j, \ якщо \ i = j \\ i - j, \ якщо \ i \neq j \end{cases}$
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ якщо \ i = j \\ -1, \ якщо \ i \neq j \end{cases}$
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ якщо \ i = j \\ 0, \ якщо \ i \neq j \end{cases}$
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \ якщо \ i = j \\ -1, \ якщо \ i \neq j \end{cases}$
- $\delta_{ij} = \begin{cases} 2, \ якщо \ i = j \\ 0, \ якщо \ i \neq j \end{cases}$

48. Діагональна матриця – це

- прямокутна матриця з елементами $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$
- квадратна матриця з елементами $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$
- квадратна матриця з елементами $a_{ij} = \lambda_i (\delta_{ij} - 1)$
- прямокутна матриця з елементами $a_{ij} = \lambda_i (\delta_{ij} - 1)$
- не знаю

49. Одинична матриця – це

- матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці
- квадратна матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці
- матриця, всі елементи першого рядка якої дорівнюють одиниці
- матриця, всі елементи першого стовпця якої дорівнюють одиниці
- квадратна матриця, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці
- число один
- не знаю

50. Операцію додавання можна здійснювати

- для будь-яких матриць $A_{m \times n}$ і $B_{k \times l}$
- для матриць $A_{m \times n}$ і $B_{k \times l}$ у яких $m \times n = k \times l$
- для матриць однакового розміру
- тільки для квадратних матриць
- не знаю

51. Добутком матриці на число називається

- число, що отримане в результаті добутку всіх елементів матриці на множник
- матриця, в якій всі елементи деякого рядка помножені на множник
- матриця, в якій всі елементи деякого стовпця помножені на множник
- матриця, в якій всі елементи помножені на множник
- не знаю

52. Операцію добутку для матриць можна здійснювати для
- будь-яких матриць
- тільки для квадратних матриць однакового розміру
- тільки для матриць однакового розміру
- тільки для узгоджених матриць
- тільки для вироджених матриць однакового розміру
- тільки для вироджених матриць
- не знаю

53. Добутком двох матриць $A_{m\times n}$ і $B_{n\times k}$ є
- число
- квадратна матриця $C_{n\times n}$
- матриця $D_{(m+n)\times(n+k)}$
- матриця $S_{m\times k}$
- не знаю

54. Для знаходження елементів матриці добутку двох матриць необхідно
- визначити розмір матриці-результату, кожен елемент якої λ_{ij} дорівнює сумі добутків елементів $i-го$ рядка першої матриці на відповідні елементи $j-го$ стовпця другої матриці
- визначити розмір матриці-результату, кожен елемент якої λ_{ij} дорівнює добутку суми елементів $i-го$ рядка першої матриці на суму елементів $j-го$ стовпця другої матриці
- визначити розмір матриці-результату, кожен елемент якої λ_{ij} дорівнює добуткові елементів $i-го$ рядка першої матриці на добуток елементи $j-го$ стовпця другої матриці
- не знаю

55. Операція множення матриць
- комутативна - $AB = BA$
- не комутативна - $AB \neq BA$
- не знаю

56. Обернена матриця може існувати для
- будь-якої матриці
- тільки для матриці-рядка
- тільки для матриці-стовпця
- тільки для діагональної матриці
- квадратної матриці
- не знаю

57. Матриця $A_{n\times n}$ називається виродженою, якщо
- $\det A \neq 0$
- $\det A = 0$
- $\det A = 1$
- $\det A = -1$
- не знаю

58. Обернена матриця існує для
- виродженої матриці
- не виродженої матриці
- квадратної матриці
- не знаю

59. Обернену матрицю позначають
- A_{-1}
- A^{o}
- A^{-1}
- $\vec{A}$
- не знаю

60. Обернена матриця знаходиться за формулою
- $\det A \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
- $\det A \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$
- $\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$
- $\frac{-1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$
- не знаю

61. Ранг матриці – це
- число нуль-елементів матриці
- число відмінних від нуля елементів матриці
- найбільший порядок визначника, що можна утворити з елементів матриці
- найбільший порядок визначника, що можна утворити з елементів матриці, не змінюючи порядку в рядках і стовпцях
- найбільший порядок відмінного від нуля визначника, що можна утворити з елементів матриці, не змінюючи порядку в рядках і стовпцях
- найбільший порядок відмінного від нуля визначника, що можна утворити з елементів матриці
- не знаю

62. Формула матричного метода розв’язування СЛАР
- $X = A \cdot B^{-1}$
- $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- $X = A^2 \cdot B$
- $X = A^{-1} \cdot B$
- $X = B \cdot A^{-1}$
- не знаю

63. Метод Гауса – це:
- метод послідовного виключення невідомих
- метод «обнуління» правої частини
- метод збалансованого виключення невідомих
- метод ранжирування невідомих відносно головного
- не знаю

64. СЛАР називається однорідною, якщо
- всі діагональні коефіцієнти дорівнюють нулю
- всі вільні члени дорівнюють нулю
- всі не діагональні коефіцієнти дорівнюють нулю
- головний визначник системи дорівнює нулю
- вона є сумісною

65. СЛАР називається сумісною, якщо
- вона має нульовий розв’язок
- вона має тільки один розв’язок
- вона має хоча б один розв’язок
- вона не має розв’язку
- не знаю

66. СЛАР називається несумісною, якщо
- вона має нульовий розв’язок
- вона має тільки один розв’язок
- вона має хоча б один розв’язок
- вона не має розв’язку
- вона має розв’язок

67. СЛАР називається визначеною, якщо
- вона має нульовий розв’язок
- вона має тільки один розв’язок
- вона має хоча б один розв’язок
- вона не має розв’язку
- не знаю

68. СЛАР називається невизначеною, якщо
- вона має нульовий розв’язок
- вона має тільки один розв’язок
- вона має хоча б один розв’язок
- вона не має розв’язку
- не знаю

69. Розширена матриця СЛАР- це:
- квадратна матриця системи
- матриця з додатковим рядком
- матриця з додатковим стовпцем
- матриця, в якій один із стовпців замінили стовпцем вільних членів
- матриця з додатковим стовпцем вільних членів
- матриця з додатковим рядком вільних членів

70. Якщо A основна матриця СЛАР, то розширена позначається так:
- $-A$
- A^{-1}
- A'
- $\tilde{A}$
- A_B

71. Теорема Кронекера-Капеллі формулюється так:
- для того щоб СЛАР мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці
- для того щоб СЛАР мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці був на одиницю менший рангу розширеної матриці
- для того щоб СЛАР мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці був на одиницю більший рангу розширеної матриці
- для того щоб СЛАР мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб добуток рангів основної і розширеної матриці дорівнював квадрату числа невідомих системи
- не знаю

72. Кількість головних невідомих СЛАР залежить від
- кількості рівнянь системи
- рангу системи
- різниці числа рівнянь та числа невідомих системи
- їх кількості в системі
- не знаю

РОЗДІЛ 2 **В е к т о р н а а л г е б р а**

§2.1 Вектор. Основні поняття про вектори

В природі існують величини, які можна характеризувати тільки однією характеристикою - ***числом***. Наприклад: площа, маса, робота, об'єм. Такі величини називаються ***скалярними.*** Будь-яке дійсне число також є скаляр. Але існують такі величини, для характеристики яких тільки чисел недостатньо. Так, наприклад, швидкість руху тіла треба характеризувати не тільки її чисельним значенням, а й напрямком.

Величина, яка визначається числом і напрямком у просторі, називається ***векторною величиною*** (наприклад: сила, швидкість, прискорення).

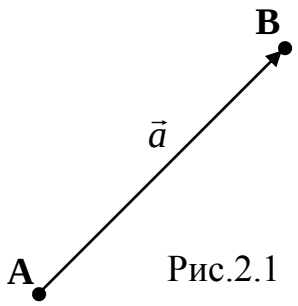


Рис.2.1

В математиці векторну величину геометрично зображують направленим відрізком, який називається ***вектором.*** Довжина вектора дорівнює чисельному значенню відповідної векторної величини, а його напрямок вказує напрямок цієї векторної величини.

У вектора розрізняють початкову та кінцеву точки. Так, вектор, у якого точка A є початковою, а точка B - кінцевою, позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначають і однією літерою, наприклад: $\vec{a}$ (Рис. 2.1). Вектор у якого початкова і кінцева точки співпадають, називається ***нуль-вектором***. Нуль-вектор є вектор із нульовою довжиною та невизначеним напрямом.

Довжина вектора називається **модулем вектора** і позначається $|\vec{AB}|$ для вектора $\overrightarrow{AB}$; або $|\vec{a}|$ для вектора $\vec{a}$.

Вектори називаються **колінеарними,** якщо вони розташовані на паралельних прямих або на одній прямій. (Рис. 2.2; Рис. 2.3)

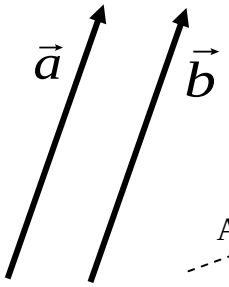


Рис.2.2

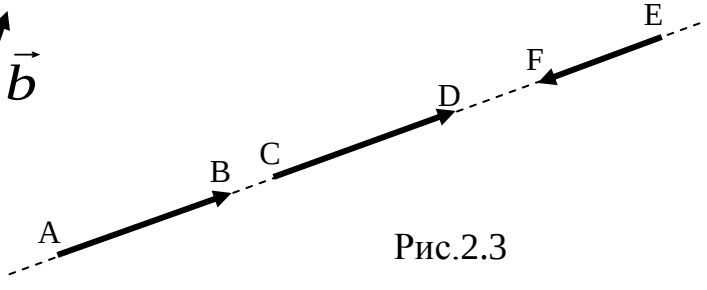


Рис.2.3

На рисунку показано колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$; і $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{EF}$

Означення. ***Вектори називаються рівними якщо вони:***

a) мають однакові модулі,

b) колінеарні,

c) однаково напрямлені.

Виходячи з означення, ***вектор можна переміщати паралельно самому собі, приймаючи за його початок будь-яку точку простору*** (Рис.2.4).

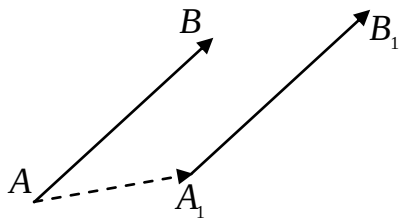


Рис. 2.4

Вектор, модуль якого дорівнює 1, називається **одиничним,** або **ортом** і позначають: $\overrightarrow{AB}^0$ або $\vec{a}^0$. За допомогою орту можна задавати координатну вісь, тому що він визначає напрямок та масштабну одиницю осі.

Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, і $\vec{c}$ називаються **компланарними,** якщо вони лежать в паралельних або в одній площині.

Кутом між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший додатній кут φ (в напрямку проти годинникової стрілки) між цими векторами, зведеними до спільного початку: $0 \le \varphi \le 180^\circ$ (Рис. 2.5)

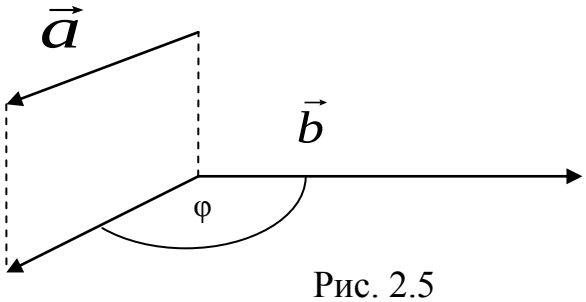


Рис. 2.5

§2.2 Додавання векторів. Метод ламаної лінії

Сумою векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …, $\vec{q}$ (Рис. 2.6.1) називається вектор $\vec{R}$, замикаючий ламану лінію, побудовану з даних векторів так, що початок кожного наступного співпадає з кінцем попереднього. Замикаючий вектор $\vec{R}$ направлений з початку 1-го вектора в кінець останнього (Рис. 2.6.2).

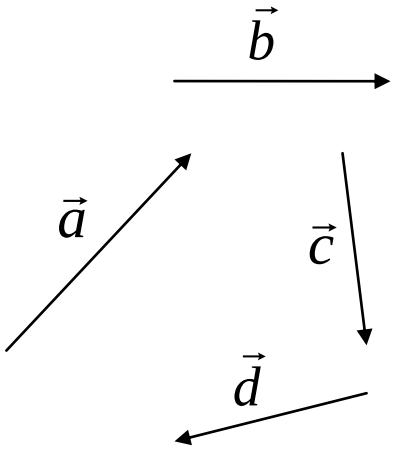


Рис.2.6.1

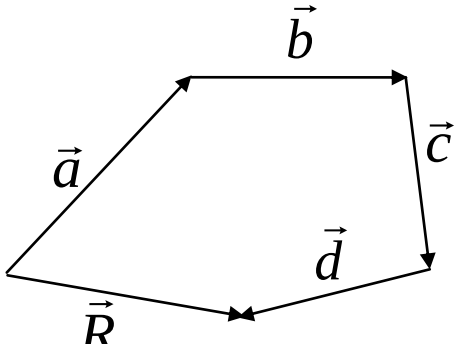


Рис.2.6.2

Сума двох векторів знаходиться за "правилом трикутника" (Рис. 2.7).

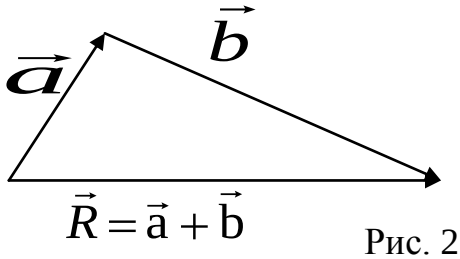


Рис. 2.7

§2.3 Правило паралелограма

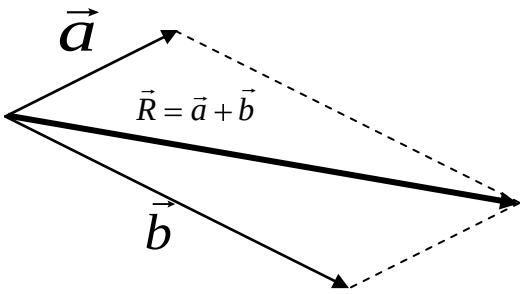


Рис. 2.8

Якщо два вектори-доданки мають спільний початок, то, добудувавши рисунок до паралелограма, вектор-сума має початок в спільному початку векторів-доданків і знаходиться на діагоналі паралелограма (Рис. 2.8)

Сумою трьох не компланарних векторів, зведених до спільного початку, є вектор-діагональ паралелепіпеда, побудованого на трьох даних векторах, як на суміжних ребрах (Рис. 2.9).

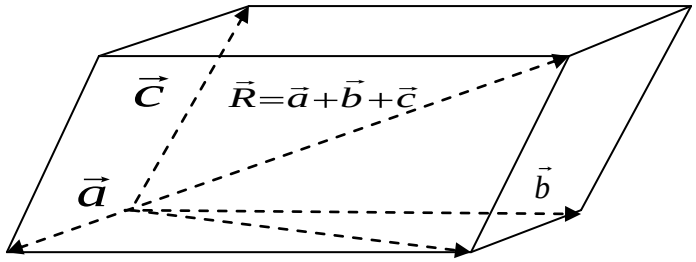


Рис. 2.9

Для суми векторів мають місце властивості:

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - переставний закон

b) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ - сполучний закон

§2.4 Віднімання векторів

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором-від'ємником $\vec{b}$ дає вектор-зменшуване $\vec{a}$. Тобто: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, якщо $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до одного початку, то вектор $\vec{c}$ має початок в кінці вектора-від'ємника $\vec{b}$, а кінець в кінці вектора - зменшуваного $\vec{a}$ (вектор $\vec{c}$ направлений по другій діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як на суміжних сторонах) (Рис. 2.10).

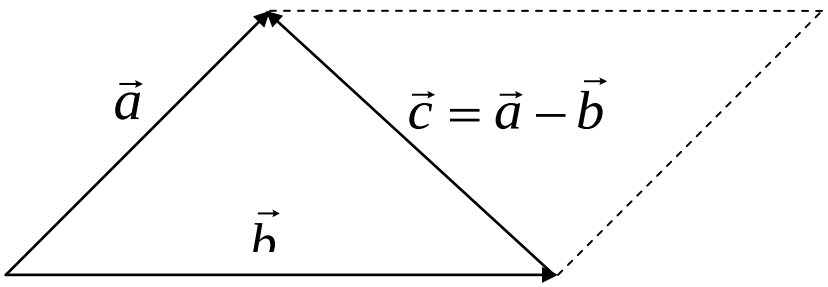


Рис.2.10

§2.5 Множення вектора на число (скаляр)

Добутком вектора $\vec{a}$ і скаляра m називається такий вектор $\vec{b}$, який:

а) має модуль, що дорівнює добутку модулів вектора $\vec{a}$ і числа m (тобто $|\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|m|$).

b) направлений однаково з вектором $\vec{a}$, якщо $m > 0$, і направлений протилежно вектору $\vec{a}$, якщо $m < 0$.

Запис: $\vec{b}=\vec{a}m$ або $\vec{b}=m\vec{a}$

Якщо $m>1$, то модуль вектора $\vec{b}$ більше модуля вектора $\vec{a}$,

Якщо $m<1$, то модуль вектора $\vec{b}$ менше модуля вектора $\vec{a}$.

Вектор $(-1\cdot\vec{a})$ називається протилежним вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$.

Частку $\frac{\vec{a}}{m}$ можна розглядати як добуток $\frac{1}{m}\vec{a}$ ($m\neq 0$).

Очевидно $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}^{\,0}$ - орт вектора $\vec{a}$. Тому $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\,0}$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $\vec{a}=m\vec{b}$, де m - деяке дійсне число, і навпаки, якщо $\vec{a}=m\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Для добутку вектора і числа має місце властивість:

$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$ - розподільний закон.

§2.6 Скалярний добуток двох векторів

Означення: *Скалярним добутком двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *називається число, що дорівнює добутку їх модулів, помноженому на косинус кута між цими векторами.*

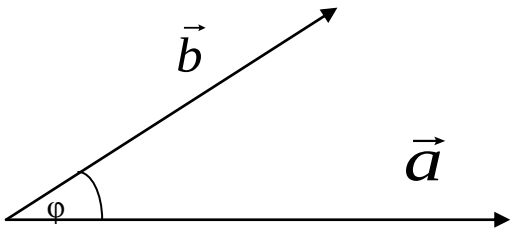


Рис. 2.11

Позначення: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, або $(\vec{a}\vec{b})$ (Рис. 2.11)

За означенням: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ (2.1)

Скалярний добуток може бути числом

додатнім (якщо $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) або від'ємним (якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$).

Приклад. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \varphi = 60^\circ$.

Розв'язок: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

З формули скалярного добутку (2.11) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (2.2)$$

(Косинус кута між двома векторами дорівнює їх скалярному добутку, поділеному на добуток їх модулів). Проекцією вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ називається як число, що знаходиться за формулою

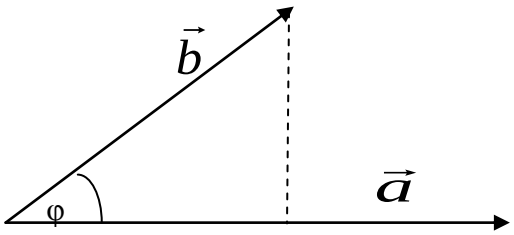


Рис. 2.12

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Проекція вектора на вектор дорівнює їх скалярному добутку, поділеному на модуль вектора, на який другий вектор проектується (Рис.2.12).

Властивості скалярного добутку:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ - переставний закон

b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ - розподільний закон

c) $(\vec{a} \cdot m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$ де m- скаляр (числовий співмножник можна виносити за знак скалярного добутку).

d) Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тому що $\cos 90^\circ = 0$.

e) Враховуючи, що $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2$ то добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають ***скалярним квадратом вектора***. Отже: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ - скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля.

Приклад: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Знайти $|\vec{c}|$, якщо $|\vec{a}|=3;\ |\vec{b}|=5$ а кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60°.

Розв'язок: $|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{c}|^2}$; обчислимо спочатку $|\vec{c}|^2$.

$$|\vec{c}|^2=\vec{c}^{\,2}=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+|\vec{b}|^2=$$
$$=3^2+2\cdot3\cdot5\cdot\cos60^\circ+5^2=9+15+25=49$$

Таким чином: $|\vec{c}|=\sqrt{49}=7$

§2.7 Векторний добуток двох векторів

Означення: *Векторним добутком двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *(у вказаному порядку) називається такий вектор* $\vec{c}$ *, який:*

1) має модуль, що дорівнює $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ *,(*φ*- кут між векторами);*

2) перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ *(а значить перпендикулярний до площини цих векторів);*

3) направлений в той бік, звідки найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ *навколо вектора* $\vec{c}$ *до суміщення з вектором* $\vec{b}$ *відбувається проти руху годинникової стрілки (**Рис. 2.13**).*

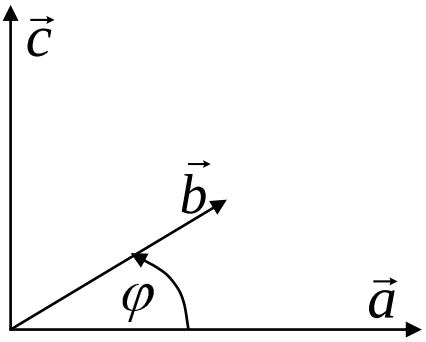


Рис.2.13

Позначення: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]$

Модуль векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює ***площі паралелограма***, побудованого на даних векторах, як на суміжних сторонах (Рис. 2.14).

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi \qquad (2.3)$$

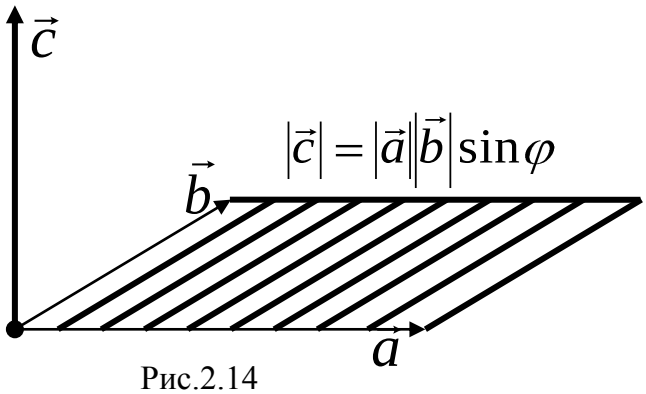


Рис.2.14

Основні властивості векторного добутку:

a) $[\vec{b}\,] = -[\vec{a}\,]$ - векторний добуток двох векторів при перестановці співмножників змінює знак на протилежний (Рис. 2.15)

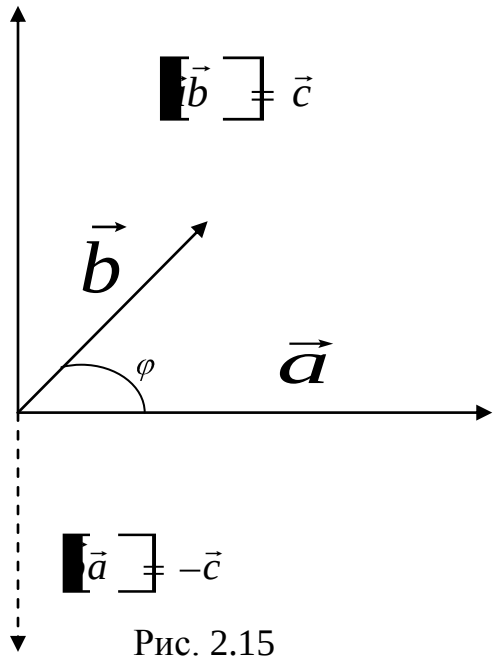


Рис. 2.15

b) $\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$ - розподільний закон.

c) $[m\vec{b}\,] = m\,[\vec{b}\,]$, m – скляр (скалярний множник можна виносити за знак векторного добутку).

d) Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то їх векторний добуток $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}] = 0$. (В цьому випадку кут φ між векторами дорівнює 0 або π, а оскільки $\sin\varphi = 0$, то $|\vec{c}| = 0$).

§2.8 Мішаний добуток трьох векторів

Означення: Мішаним (або векторно-скалярним) добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (у вказаному порядку) називається скалярний добуток векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ і вектора $\vec{c}$. Позначення: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Модуль змішаного добутку трьох не компланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, як на суміжних ребрах.

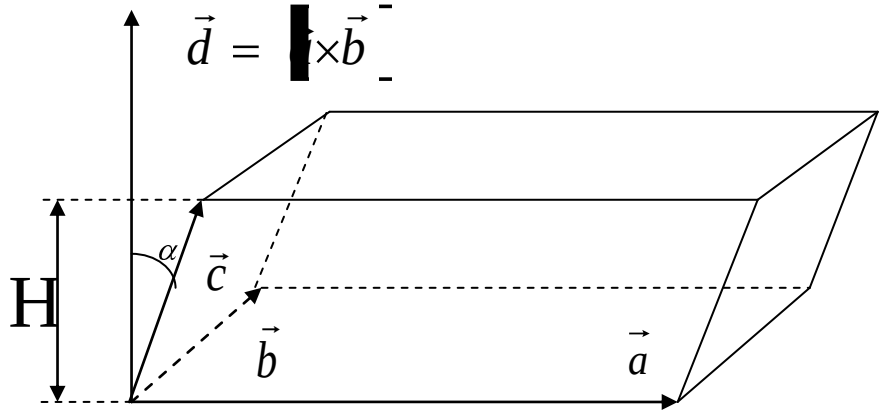


Рис. 2.16

$V = S_0 H$, де V – об'єм, S_0 - площа основи, H – висота паралелепіпеда (Рис. 2.16).

$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |[\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c}| = |\vec{d} \times \vec{c}| = |\vec{d}||\vec{c}||\cos\alpha| = S_0 H$, тому що $|\vec{d}| = S_0$; $|\vec{c}||\cos\alpha| = H$. Отже $|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]| = V$.

Приклад. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ і вектор $\vec{c}$ утворює з площиною векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ кут в 30° (Рис. 2.17).

Розв'язок: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ Позначимо $(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{d}$

$\vec{d} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin 90^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8.$.

Нехай М - проекція С на площину векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $\angle MOC = 30^\circ$. $\angle COD = 60^\circ$, що є кутом між $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

Тому $\vec{d} \cdot \vec{c} = \left|\vec{d}\right|\left|\vec{c}\right|\cos 60^0 = 8 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 12$. Отже $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 12$.

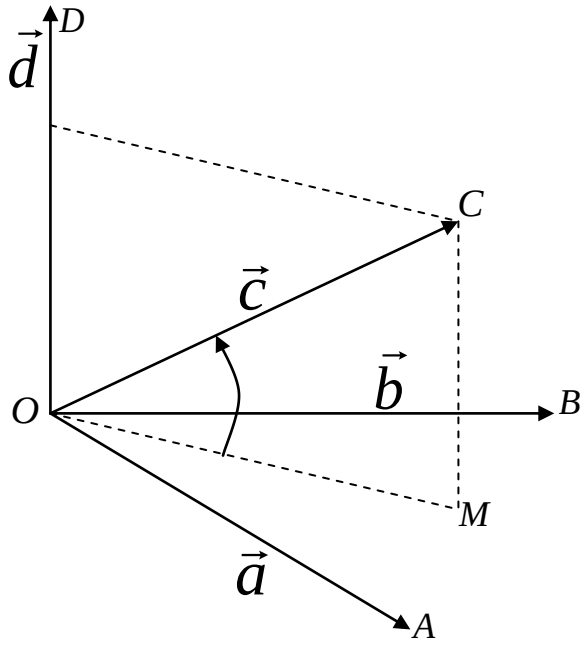


Рис. 2.17

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *компланарні*, то їх мішаний добуток дорівнює 0 (Рис. 2.18).

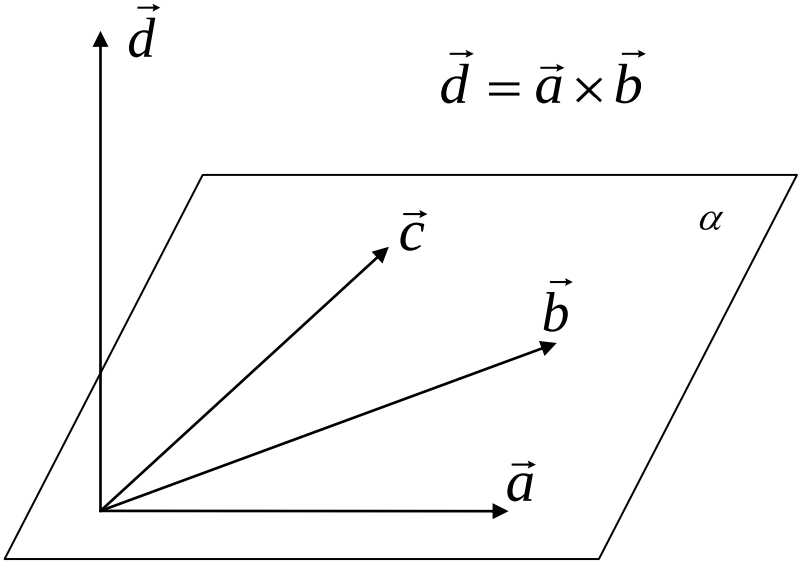


Рис.2.18

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лежать в одній площині α і нехай $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ Тоді, оскільки $\vec{d}\perp\vec{a}$ і $\vec{d}\perp\vec{b}$, то $\vec{d}\perp\vec{c}$. А тому скалярний добуток векторів $\vec{d}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю. Отже мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, дорівнює нулю, тобто $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

Для мішаного добутку має місце властивість кругової перестановки: $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=(\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b})=(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a})$. Для запам'ятовування: (Рис. 2.19).

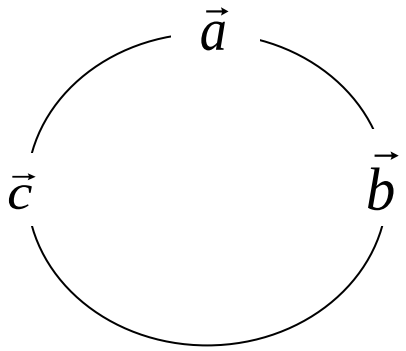


Рис. 2.19

§2.9 Координати вектора

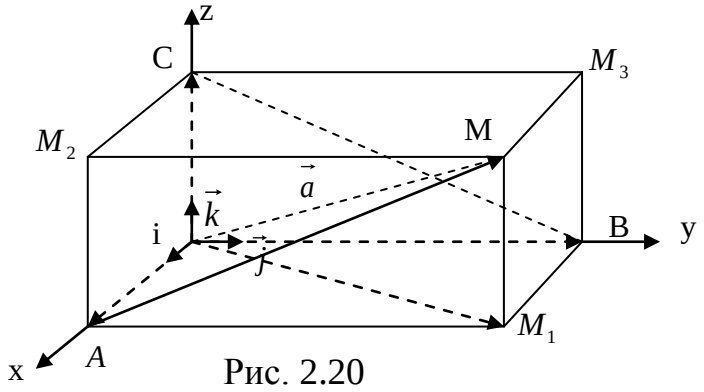


Рис. 2.20

Нехай вектор $\vec{a}$ має початок у початку координат О, а кінець в точці М (x; y; z). Проектуємо точку М на осі координат Ох, Оу, Оz відповідно площинам MM_1AM_2, MM_1BM_3, MM_2CM_3.

Одержимо на осі Ох точку $A(x;0;0)$, на осі Оу точку $B(0;y;0)$, на осі Oz точку $C(0;0;z)$ (Рис. 2.20). Очевидно:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{2.4}$$

Таким чином вектор $\vec{a}$ представлений у вигляді суми трьох векторів, направлених по осям координат. Візьмемо на осях Ох, Оу, Oz відповідно орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$, напрямки яких співпадають з цими осями. В такому разі:

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i}; \quad \overrightarrow{OB} = y \cdot \vec{j}; \quad \overrightarrow{OC} = z \cdot \vec{k};$$

Отже маємо:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.. \tag{2.5}$$

Цей запис означає розклад вектора $\vec{a}$ за ортами координатних осей. Числа x, y, z є проекції вектора $\vec{a}$ відповідно на осі координат Ох, Оу, і Oz. Вони називаються координатами вектора $\vec{a}$ (або просто проекціями). Запис $\vec{a} = (x, y, z)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати, рівні $x, y, z.$

Зазначимо, що *x, y, z* в той же час є координатами точки М – кінця вектора $\vec{a}$, що має початок в точці О.

Координати вектора визначають його модуль і напрямок.

Виразимо модуль вектора $\vec{a}=(x,y,z)$ через його координати. Так як вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з суміжними ребрами довжини $|x|,\ |y|,\ |z|$,то його модуль визначається так:

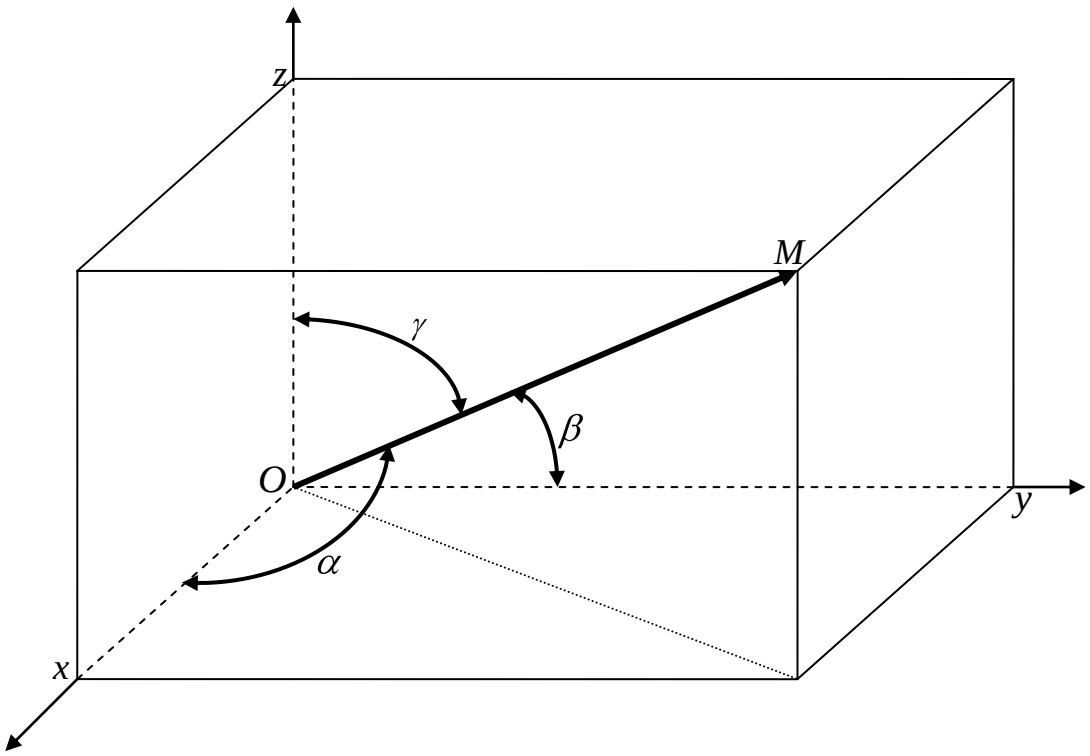


Рис. 2.21

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ . \qquad (2.6)$$

Кути, які вектор $\vec{a}$ утворює з додатними напрямами осей координат $0x,\ 0y,\ 0z$ називаються *спрямовуючими кутами* вектора і позначаються, відповідно, α,β,γ (Рис. 2.21). Косинусу цих кутів називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Нехай дано: $\vec{a}=(x,y,z)$. Очевидно: $x=|\vec{a}|\cos\alpha,$ тобто

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|},\quad \text{або}\quad \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\text{...(а)}$$

Аналогічно: $\cos в=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\text{...(б)},\ \cos г=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\text{...(в)}.$ (2.7)

Якщо обидві частини рівностей (а), (б), (в) піднести до квадрату та додати, то отримаємо:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (2.8)$$

Це означає, що сума квадратів напрямних косинусів вектора дорівнює 1. Зазначимо, що для одиничного вектора $x=\cos\alpha,\ y=\cos\beta,\ z=\cos\gamma$.

Нехай вектор $\vec{a}$ заданий початковою точкою $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і кінцевою точкою $M_2(x_2;y_2;z_2)$.(Рис. 2.22)

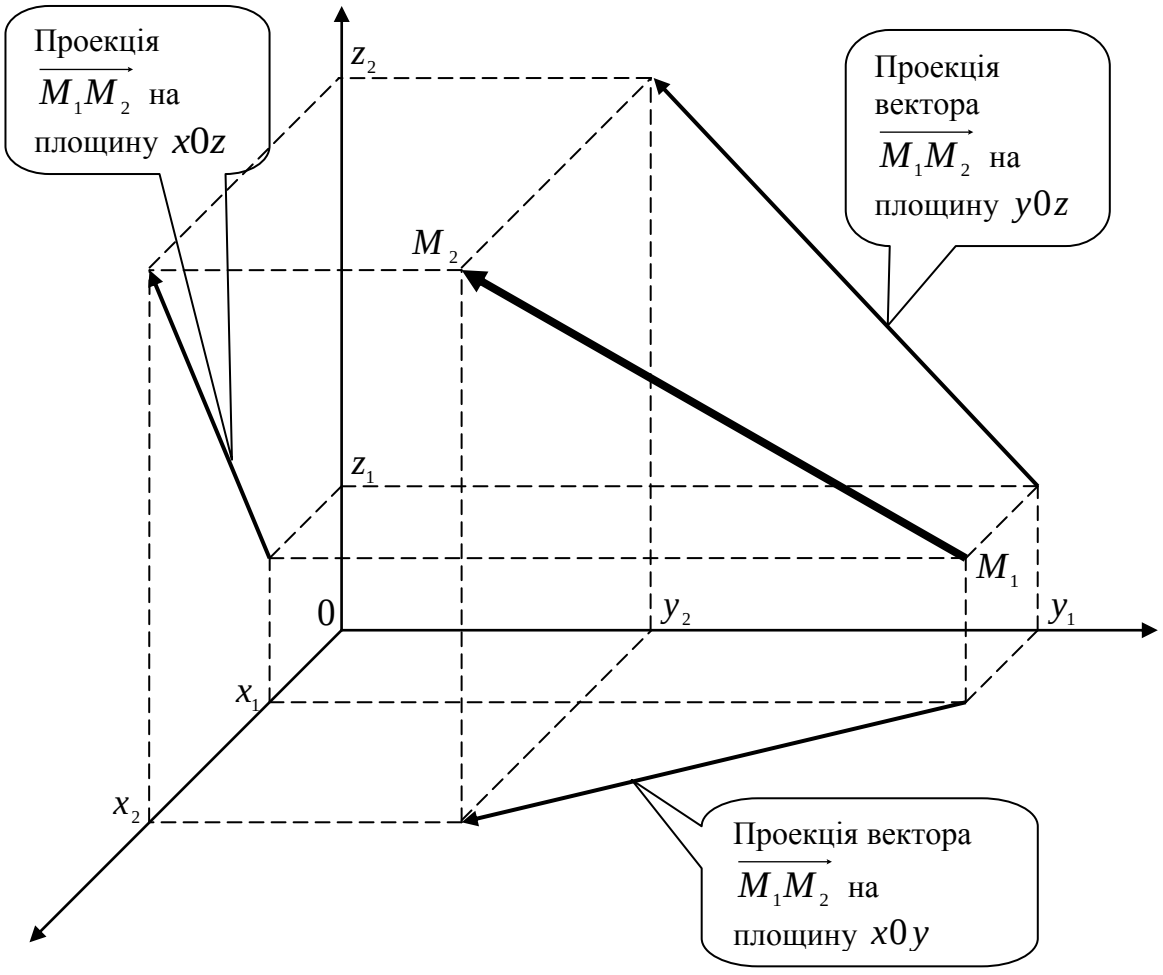


Рис. 2.22

Проектуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ на координатні осі. Маємо:

$$Пр_{Ox}\overrightarrow{M_1M_2}=x_1-x_2;\ Пр_{Oy}\overrightarrow{M_1M_2}=y_1-y_2;\quad Пр_{Oz}\overrightarrow{M_1M_2}=z_1-z_2.$$

Отже:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2), \quad (2.9)$$

тобто, координати вектора дорівнюють різниці однойменних координат кінця і початку цього вектора (Рис. 2.22).

Модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ обчислюється за формулою:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.10)$$

За цією формулою обчислюється відстань між двома точками.

Приклад: Обчислимо відстань між точками $M_1(4; 3; -5)$, $M_2(6; 2; -3)$.

$$M_1M_2 = \sqrt{(6-4)^2 + (2-3)^2 + (-3+5)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

§2.10 Вираз суми і різниці векторів через їх координати

Нехай задано вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо координати вектора-суми $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ та вектора-різниці $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ через координати заданих векторів. Запишемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у вигляді розкладу за ортами координатних осей $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$; $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Додамо відповідно ліві та праві частини. Матимемо:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2). \quad (2.11)$$

Отже, координати суми векторів дорівнюють сумі однойменних координат векторів-доданків. Аналогічно можна одержати:

$$(\vec{a} - \vec{b}) = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2). \quad (2.12)$$

Координати різниці векторів дорівнюють різниці однойменних координат вектора-зменшуваного та вектора-від'ємника:

§2.11 Вираз добутку скаляра і вектора через координати вектора

Знайдемо добуток скаляра *m* та вектора $\vec{a} = (x, y, z)$.

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = mx \cdot \vec{i} + my \cdot \vec{j} + mz \cdot \vec{k} \quad (2.13)$$

тобто: $m\vec{a} = (mx; my; mz).$

Координати вектора, одержаного множенням заданого вектора на скаляр, дорівнюють добуткам цього числа і відповідних координат вектора-множника.

Якщо **вектори колінеарні**, то їх однойменні **координати пропорційні**. Дійсно якщо вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ колінеарні, то $\vec{a} = m\vec{b},$ де m - деяке дійсне число. Оскільки $m\vec{b} = (mx_2; my_2; mz_2),$ то $x_1 = mx_2, y_1 = my_2, z_1 = mz_2,$ звідки одержимо

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (2.14)$$

Якщо однойменні координати векторів пропорційні, то ці вектори колінеарні. Нехай для векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ мають місце співвідношення: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$ Тоді $x_1 = mx_2, y_1 = my_2, z_1 = mx_2,$ де m - деяке дійсне число. Тому $\vec{a} = m\vec{b}$, що означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Якщо вектори рівні, то їх однойменні координати однакові.

І, навпаки, якщо однойменні координати однакові, то таки вектори рівні.

§2.12 Поділ відрізка в даному відношенні

Задача про поділ відрізка $\overrightarrow{M_1M_2}$ деякої прямої в даному відношенні λ полягає в знаходженні на цій прямій такої точки М, що $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$.

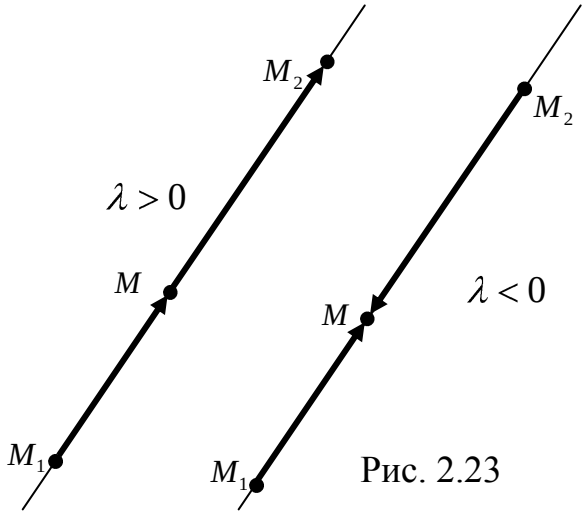


Рис. 2.23

При цьому, якщо $\lambda > 0$, то точка М знаходиться між точками M_1 і M_2, тому що в цьому випадку вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{MM_2}$ одного напрямку.

Якщо $\lambda < 0$, то точка М знаходиться на прямій поза відрізком M_1M_2, тому

що вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{MM_2}$ протилежно направлені (Рис. 2.23). Нехай дано точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і число λ. Знайдемо формули для обчислення координат точки $M(x, y, z)$, яка поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ.

Оскільки: $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$, $\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z)$ і $\lambda \cdot \overrightarrow{MM_2} = (\lambda(x_2 - x); \lambda(y_2 - y); \lambda(z_2 - z))$, то з умови рівності векторів $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$ маємо: $x - x_1 = \lambda(x_2 - x);$ $y - y_1 = \lambda(y_2 - y);$ $z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$ звідки отримаємо:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}; \tag{2.15}$$

Приклад: Знайти координати точки М, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{2}{3}$, якщо $M_1(-2, -1, 5); M_2(8, 4, -5).$

Розв'язок:

$$x = \frac{-2 + \frac{2}{3} \cdot 8}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-4 + 24}{5} = 4;\ y = \frac{-1 + \frac{2}{3} \cdot 4}{\frac{5}{3}} = \frac{-2 + 12}{5} = 2;\ z = \frac{5 + \frac{2}{3} \cdot (-5)}{\frac{5}{3}} = \frac{10 - 15}{5} = -1.$$

Отже: М(4, 2, -1).

§2.13 Вираз скалярного добутку двох векторів через їх координати

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$
$$= x_1x_2(\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i} \cdot \vec{k}) +$$
$$+ y_1x_2(\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j} \cdot \vec{k}) +$$
$$+ x_2x_1(\vec{k} \cdot \vec{i}) + y_2z_1(\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k} \cdot \vec{k}).$$

Оскільки $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні і взаємно-перпендикулярні вектори (орти відповідно осей координат $0x$, $0y$, $0z$), то

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = (\vec{k})^2 = 1 \qquad (\vec{i}\cdot\vec{j}) = (\vec{i}\cdot\vec{k}) = (\vec{j}\cdot\vec{k}) = 0$$

Тому одержимо:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2; \tag{2.16}$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних векторів-співмножників.

Кут φ між векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ через їх координати знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \tag{2.17}$$

Проекція вектора $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ на вектор $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ визначається за формулою:

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \tag{2.18}$$

Приклад: Обчислити проекцію вектора $\vec{a} = (3, -1, 4)$ на вектор $\vec{b} = (4, 2, -4)$.

$$Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{3\cdot 4 + (-1)\cdot(-2) + 4\cdot(-4)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{12 + 2 - 6}{\sqrt{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

§2.14 Вираз векторного добутку векторів через їх координати

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) =$$

$$= x_1x_2\,\vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\,\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\,\vec{i} \times \vec{k} + x_2y_1\,\vec{i} \times$$

$$+ y_1y_2\,\vec{j} \times \vec{j} + y_1z_2\,\vec{j} \times \vec{k} + x_2x_1\,\vec{i} \times \vec{i} + y_2z_1\,\vec{j} \times \vec{j} + z_1z_2\,\vec{k} \times$$

На основі означення векторного добутку і його властивостей маємо :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j};\quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = -\vec{k};\quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j};\quad \vec{j} \times \vec{j} = -\vec{i};\quad \vec{i} \cdot \vec{i} = 0;\quad \vec{k} \times \vec{k} = 0;\quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 0.$$

Тому можемо записати:

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\,\vec{j} - x_2y_1\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + x_2z_1\,\vec{j} - y_2z_1\vec{i}$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\,\vec{j} - (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (2.19)$$

Приклад. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = (3, -2, 1)$ та $\vec{b} = (2, 1, -4)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 7\vec{i} + 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

Приклад. Обчислити площу паралелограма ABCD, якщо дано три його вершини A(-2; 5; 1), B(2; 5; 3), D(0; 4; 3)

Розв'язок: $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$. Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB} = (4; 0; 2); \quad \overrightarrow{AD} = (2; -1; 2)$ (Рис. 2.24)

Обчислюємо векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2. \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

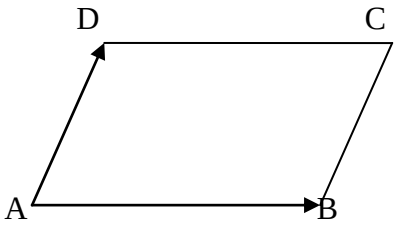


Рис. 2.24

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6; \quad S = 6(\text{кв.од})$$

§2.15 Вираз змішаного добутку через координати векторів-співмножників

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_2, z_3)$.

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}) =$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & x_3 & x_3 \end{vmatrix}.$$

Тобто: $$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.20)$$

Приклад: Обчислити $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$, якщо $\vec{a}=(2,-1,3),\ \vec{b}=(3,2,1),\ \vec{c}=(5,0,2).$

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 4+1+3\cdot(-10)=8+1-30=-21$$

Задача: У трикутній призмі задано чотири її вершини, що належать трьом суміжним ребрам: A(-2; 5; 7) B(4; 3; 10) C(6; 1 ; 7) D(16; 5; 13).

A – спільна точка суміжних ребер (Рис. 2.25).

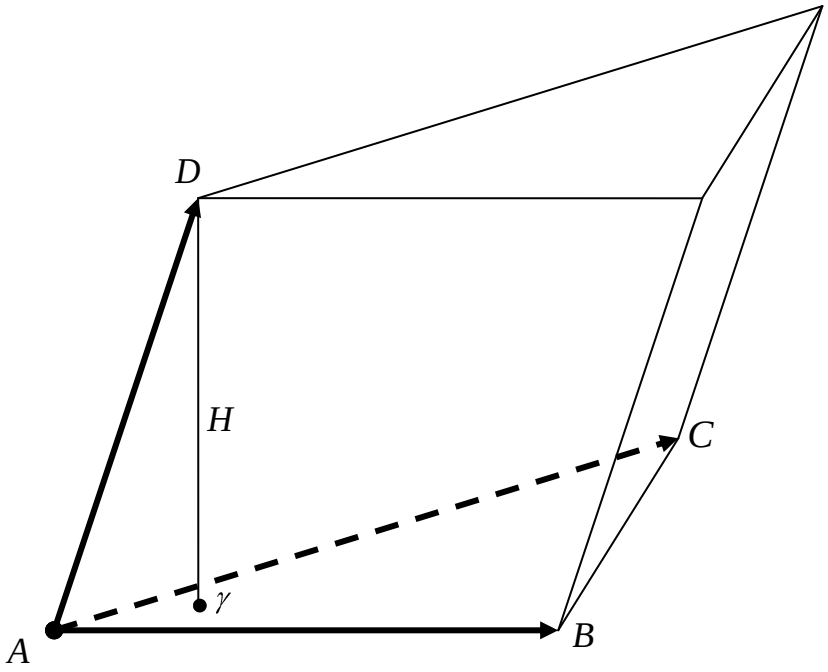


Рис. 2.25

Обчислити:

1) Довжину ребра АВ.

2) Проекцію $\overrightarrow{AD}$ на $\overrightarrow{AB}$.

3) Площу S грані ABC.

4) Об’єм V призми.

5)Довжину Н висоти, проведеної до основи АВС призми.

Розв'язок.

1) $\overrightarrow{AB}=(6;2;-3);\quad AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7(лін.од.)$

2) $ПР_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|};\quad \overrightarrow{AD}=(18,0,6);$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=6\cdot 18+(-2)\cdot 0+3\cdot 6=108+18=126.\quad ПР_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD}=\dfrac{126}{7}=18$

3) $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|;\quad \overrightarrow{AC}=(8;-4;0);$

4) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -2 & 3\\ 8 & -4 & 0\end{vmatrix}=12\vec{i}+24\vec{j}+8\vec{k}.$

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{144+576+64}=\sqrt{784}=28.\qquad S=\dfrac{1}{2}\cdot 28=14(кв.од)$

4) $V=\dfrac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)\right|,\quad \left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}6 & -2 & 3\\ 8 & -4 & 0\\ 18 & 0 & 6\end{vmatrix}=6\cdot(-24)+2\cdot 48+3\cdot 72=168.$

$V=\dfrac{1}{2}168=84(куб.од)$

5) $V=SH;\ H=\dfrac{V}{S};\ H=\dfrac{84}{14}=6\ (лін.од)$

§2.16 ТЕСТИ
ТЕМА: ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. Вектор – це
   - число
   - відрізок
   - направлений відрізок
   - пряма лінія
   - промінь

2. Довжина вектора називається
   - абсолютною величиною
   - модулем вектора
   - відрізком
   - виміром вектора
   - променем вектора

3. Довжина вектора в просторі обчислюється за формулою:
   - - $|\vec{a}| = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}$
   - - $|\vec{a}| = \sqrt{x + y + z}$
   - - $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   - - $|\vec{a}| = \sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}$
   - - $|\vec{a}| = \sqrt{2x + 2y + 2z}$

4. Вектори, які розташовані на одній прямій або на паралельних прямих називаються
   - колінеарними
   - компланарними
   - рівними
   - одиничними
   - двомірними

5. Рівність векторів
   - існує
   - не існує
   - не знаю

6. Вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах називаються
   - паралельними
   - колінеарними
   - площинними

- рівними
- компланарними

7. Вектор
   - можна переміщати паралельно самому собі
   - можна переміщати під довільним кутом
   - можна переміщати перпендикулярно самому собі
   - взагалі не можна переміщати
   - можна переміщати за годинниковою стрілкою

8. Якого правила додавання векторів не існує?
   - піраміди
   - трикутника
   - паралелограма
   - ламаної лінії
   - не знаю

9. Добутком вектора на число є
   - число
   - пряма
   - прямокутник
   - трикутник
   - вектор

10. Орт – це вектор
    - який перпендикулярний первинному вектору
    - модуль якого дорівнює 1 і лежить на первинному вектору
    - який паралельний первинному вектору
    - який перпендикулярний іншому вектору
    - довжина якого дорівнює 0

11. Орт вектора позначається символом
    - - $\vec{a}^{0}$
    - - $\vec{a}_{0}$
    - - $\vec{o}$
    - не знаю

12. Скалярним добутком двох векторів називають
    - вектор, що дорівнює добутку їх модулів, помноженому на косинус кута між ними
    - вектор, що дорівнює добутку їх модулів, помноженому на синус кута між ними
    - число, що дорівнює добутку їх модулів, помноженому на синус кута між ними

- число, що дорівнює добутку їх модулів, помноженому на тангенс кута між ними
- число, що дорівнює добутку їх модулів, помноженому на косинус кута між ними
- не знаю

13.Скалярний добуток двох векторів позначається виразом

- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$
- $\vec{a}\vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$

14. Модуль скалярного добутку двох векторів визначається формулою

- $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$
- $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$
- $|\vec{a}||\vec{b}|tg\varphi$
- інша формула
- не знаю

15.Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то скалярний добуток

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1$
- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$
- $\vec{a} \bullet \vec{b} = 2$
- $\vec{a} \bullet \vec{b}$ не існує
- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \infty$

16.Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається з формули

- $\sin\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
- $tg\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
- $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
- не знаю

17.Векторним добутком двох векторів є

- вектор

- число
- скаляр
- трикутник
- паралелограм

18.Векторний добуток двох векторів позначається виразом

- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$
- $\vec{a} + \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$

19.Модуль векторного добутку двох векторів чисельно дорівнює

- висоті паралелограма, побудованого на даних векторах, як на суміжних сторонах
- основі паралелограма, побудованого на даних векторах, як на суміжних сторонах
- площі паралелограма, побудованого на даних векторах, як на суміжних сторонах
- головній діагоналі паралелограма, побудованого на даних векторах, як на суміжних сторонах
- добутку діагоналей паралелограма, побудованого на даних векторах, як на суміжних сторонах

20.Векторний добуток двох векторів при перестановці співмножників

- не змінюється
- збільшується в 2 рази
- зменшується в два рази
- змінює знак на протилежний
- не знаю

21.Якщо два вектори колінеарні, то їх векторний добуток

- є вектор, довжина якого дорівнює добутку довжин векторів-співмножників
- не існує
- є число, що дорівнює 1
- є число, що дорівнює 0
- є нуль-вектор

22.Модуль векторного добутку двох векторів визначається формулою

- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$
- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$
- $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|tg\varphi$

- інша формула
- не знаю

23.Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається
- векторний добуток векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ і вектора $\vec{c}$
- скалярний добуток векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ і вектора $\vec{c}$
- скалярний добуток скалярного добутку $\vec{a} \bullet \vec{b}$ і вектора $\vec{c}$
- векторний добуток скалярного добутку $\vec{a} \bullet \vec{b}$ і вектора $\vec{c}$
- не знаю

24.Модуль мішаного добутку трьох не компланарних векторів дорівнює
- повній площі поверхні паралелепіпеда, побудованого на цих векторах
- площі основи паралелепіпеда, побудованого на цих векторах
- бічній площі поверхні паралелепіпеда, побудованого на цих векторах
- об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах
- половині об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах

25.Орти координатних осей вектора позначають
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
- $\vec{k}, \vec{p}, \vec{t}$
- $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

26.Сума квадратів напрямних косинусів вектора дорівнює
- 0
- 3
- не існує
- мінус 1
- 1

27.Якщо вектори колінеарні, то їх відповідні координати
- рівні
- пропорційні
- дорівнюють 0
- відрізняються тільки знаком
- не знаю

28.Координати точки, яка поділяє відрізок у відношенні λ
- $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}$

- $x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1+\lambda} \quad y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1+\lambda} \quad z = \dfrac{z_1 - \lambda z_2}{1+\lambda}$

- $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1-\lambda} \quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1-\lambda} \quad z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1-\lambda}$

- $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$

- $x = \dfrac{2x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad y = \dfrac{2y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad z = \dfrac{2z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$

29. Векторний добуток векторів через їх координати знаходиться за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z & x_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

30. Мішаний добуток векторів через їх координати знаходиться за формулою

- $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$
- $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
- $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$
- $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$
- $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

РОЗДІЛ 3 Елементи аналітичної геометрії

§ 3.1. Рівняння лінії на площині

Основні поняття, методи та формули аналітичної геометрії застосовуються в багатьох навчальних дисциплінах, а також в різноманітних економічних задачах. Найчастіше використовуються рівняння прямої та кривих ліній на площині, рівняння площини та прямої в просторі та їх графіки.

З початкового курсу математики відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об'єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри – числа, рівняння, функції.

Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними методами.

Для застосування методів алгебри до розв'язування задач геометрії встановлюється зв'язок між геометричним об'єктом та числами. Способом встановлення такого зв'язку є метод координат, який першим систематично використовував *Рене Декарт (1596-1650).*

При цьому методі найпростішому геометричному образу – точці ставиться у відповідальність упорядкована множина чисел – координати точки. Більш складні геометричні образи розглядають як *геометричне місце точок* (**ГМТ**), що задовольняють певним умовам. Ці умови зв'язують координати точок у відповідне математичне співвідношення рівняння. Таким чином, метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об'єкта.

Отже, ***основним методом аналітичної геометрії є метод координат.***

Означення. *Геометричним місцем точок називається така множина точок, яка має певну властивість, і серед якої нема жодної точки, що не має вказаної властивості.*

Якщо властивість записано у вигляді:

$$F(x;y)=0 \text{ або } y=f(x) \qquad (3.1)$$

то кажуть, що це є рівнянням даної лінії. Якщо точка рухається по лінії, то її координати, змінюючись, залишаються зв'язаними умовами або рівнянням (3.1)

Означення. *Рівняння* $F(x;y)=0$ *називається рівнянням лінії в даній системі координат, якщо координати (x;y) довільної точки площини задовольняють дане рівняння тоді і тільки тоді, коли точка належить цій лінії.*

Математично це означення можна записати так: $F(x;y)=0$ буде рівнянням лінії l на площині, якщо:

$$F(x,y)=0, \quad M(x,y)\in l;$$

$$F(\tilde{x},\tilde{y})\neq 0, \quad M(\tilde{x},\tilde{y})\notin l.$$

Наприклад, рівняння $x-y=0$ на площині визначає бісектриси 1-го і 3-го і координатних кутів, а рівняння $x^2+y^2=0$ визначає тільки одну точку з координатами $x=0$, $y=0$ тобто початок координат.

§ 3.2 Рівняння прямої лінії на площині

Найпростішою лінією на площині є пряма. Щоб скласти рівняння прямої лінії на площині, треба якимось способом задати умови, які визначають її положення відносно координатних осей. Способів може бути декілька, тому можна одержувати рівняння прямої різного вигляду.

При складанні рівнянь ліній на площині будемо використовувати апарат векторної алгебри.

Різновиди рівняння прямої на площині.

а) Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ ***перпендикулярно заданому вектору*** $\vec{n}=(A;B)$ (рис. 3.1).

Візьмемо довільну точку $M(x,y)$ цієї прямої і розглянемо вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0). \tag{3.2}$$

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{n}$ перпендикулярні, тому їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{3.3}$$

Координати будь-якої точки прямої задовольняють рівняння (3.3), а координати точки, що не лежить на цій прямій, не задовольняють рівняння (3.3). Тому рівняння (3.3) є рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A;B)$.

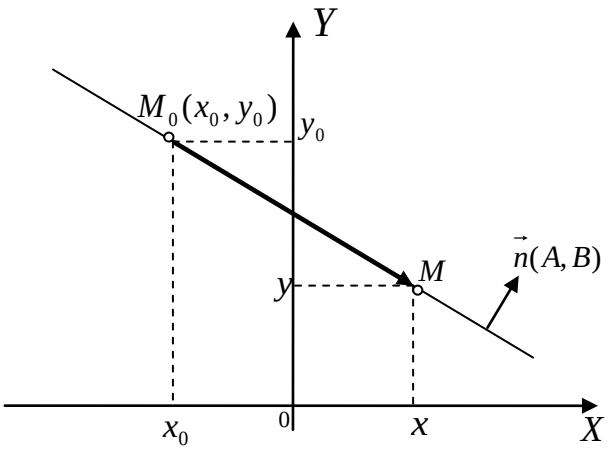


Рис. 3.1

Приклад. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(4;-7)$ і перпендикулярно заданому вектору $\vec{n}=(3;5)$.

Розв'язання: Використаємо рівняння (3.3), враховуючи, що в даному випадку $A=3;\ B=5;\ x_0=4;\ y_0=-7$. Підставляючи, ці значення в рівняння (3.3) одержимо: $3(x-4)+5(y+7)=0 \Rightarrow 3x-12+5y+35=0 \Rightarrow 3x+5y+23=0.$

Приклад. Вектор, що перпендикулярний до шуканої прямої, задається точками $T(3;8)$ *і* $Q(-5;4)$. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку середину відрізка TQ.

Розв'язання: Знайдемо координати точки $P(m;n)$ - середину відрізка TQ:

$$m=\frac{3+(-5)}{2}=-1;\quad n=\frac{8+4}{2}=6$$

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{TQ}$: $\overrightarrow{TQ}=(-5-3;\ 4-8)=(-8;-4)$.

Використаємо рівняння (3.3):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \ \Rightarrow\ -8(x+1)-4(y-6)=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8x-4y+16=0 \ \Rightarrow 2x+y-4=0.$$

b) Канонічне рівняння прямої - рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ ***паралельно заданому вектору*** $\vec{p}=(n;m)$ **(рис. 3.2).**

Нехай в системі координат задана точка $M_0(x_0;y_0)$ через яку проходить пряма та вектор $\vec{p}=(n;m)$, який паралельний даній прямій. На прямій виберемо довільну точку $M(x;y)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$.. Якщо точка M належить прямій, то вектори $\vec{p}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ будуть колінеарними, а в колінеарних векторів координати пропорційні. Тому маємо:

$$\frac{x-x_0}{n}=\frac{y-y_0}{m} \qquad (3.4)$$

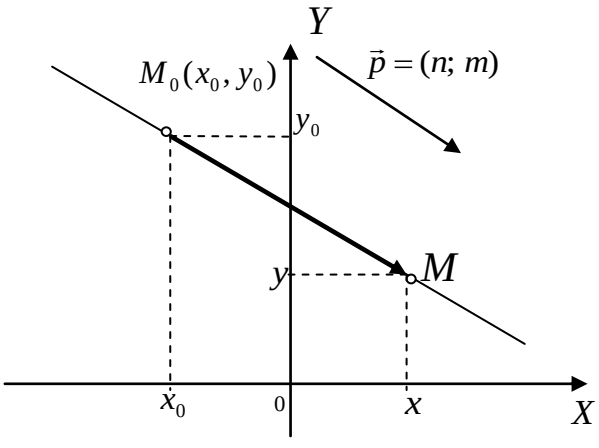


Рис. 3.2

тобто рівняння прямої, що проходить через задану точку та в заданому напрямку.

Позначимо змінну величину дробу через параметр t і здійснимо наступні перетворення:

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{n}=t\\ \dfrac{y-y_0}{m}=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-x_0=nt\\ y-y_0=mt\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=nt+x_0\\ y=mt+y_0\end{cases}$$

отримаємо ***параметричне рівняння прямої.***

Приклад. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;-2)$ і має напрямний вектор $\vec{p}$ = (5; 7).

Розв'язання: Використаємо рівняння (3.4), враховуючи, що в даному випадку $x_0 = 3;\ y_0 = -2;\ \ n = 5;\ \ m = 7$. Підставляючи, ці значення в рівняння (3.4) одержимо:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{7}$$

Параметричне рівняння прямої можна отримати з канонічного рівняння, провівши деякі перетворення

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{7} \ \Rightarrow\ \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{7} = t \ \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{5} = t \\ \dfrac{y+2}{7} = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 5t \\ y+2 = 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3+5t \\ y = -2+7t \end{cases}$$

в) Рівняння прямої, що утворює з віссю $0x$ ***кут та відтинає на осі*** $0y$ ***заданий відрізок*** (рис. 3.3).

Щоб записати рівняння прямої лінії необхідно задати умови (параметри), які визначають положення прямої лінії відносно осей координат. Одним із таких параметрів є «кутовий коефіцієнт»

$$k = tg\varphi$$

де φ - кут, що утворює пряма з додатнім напрямом осі $0x$. Але таких прямих можна провести безліч. Тому необхідно вказати ще параметр, за допомогою якого із «сімейства паралельних прямих» можна вибрати одну і тільки одну пряму. Таким параметром може бути **<u>відрізок</u>** що відтинає пряма на осі $0y$ - ОА.

На прямій візьмемо довільну точку $M(x;\ y)$ і проведемо пряму паралельну осі $0x$**.** Вона перетне вісь $0y$ в точці $C(0;\ y)$. Розглянемо прямокутний трикутник ΔAMC. Довжина катетів знайдемо за формулами:

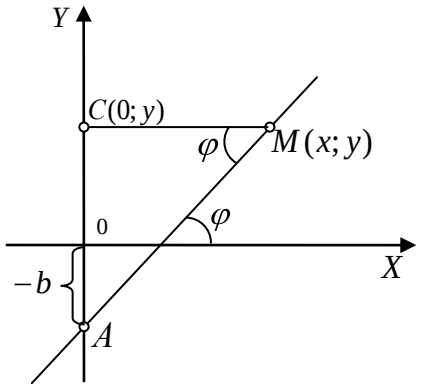


Рис. 3.3

$$|CA| = y_C - y_A = y - (-b) = y + b,\ |CM| = x.$$

Тоді $tg\varphi = \dfrac{y+b}{x}$, або

$k = \dfrac{y+b}{x} \Rightarrow kx = y + b \Rightarrow y = kx + (-b)$ отже, рівняння прямої із кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y = kx + b \qquad (3.5)$$

Якщо ***пряма перпендикулярна до осі*** $0x(\varphi = 90^\circ)$ в точці c, то її рівняння буде

$$x = c \tag{3.6}$$

Якщо пряма проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд

$$y = kx. \tag{3.7}$$

Якщо пряма паралельна осі $0x$, то її рівняння має вигляд

$$y = b \tag{3.8}$$

Рівняння осі $0x$ має вигляд $y = 0$; а осі $0y$ відповідає рівняння $x = 0$.

Як наслідок двох попередніх типів рівняння прямої лінії, можна записати рівняння прямої що проходить через дану точку $A(x_A; y_A)$ в даному напрямку, який визначається кутовим коефіцієнтом k:

$$y - y_A = k \cdot (x - x_A) \tag{3.9}$$

Приклад. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4; 7)$ і утворює з віссю $0x$ кут 30°.

Розв'язання: Знайдемо кутовий коефіцієнт: $k = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тоді, використовуючи формулу (3.9), отримаємо:

$$y - y_A = k \cdot (x - x_A) \Rightarrow y - 7 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 7 + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Приклад. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(5; 1)$ і утворює з віссю $0x$ кут 135°.

Розв'язання: Знайдемо кутовий коефіцієнт: $k = tg135^\circ = -tg45^\circ = -1$. Тоді, використовуючи формулу (3.9), отримаємо:

$$y - 1 = -1(x - 5) \Rightarrow y = -x + 6.$$

г) Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай в декартовій системі координат задано положення двох точок $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$ через які проходить пряма лінія (рис. 3.4). Візьмемо на прямій довільну «біжучу» точку $M(x; y)$ і розглянемо два вектори $\vec{AB}$ *і* $\vec{AM}$

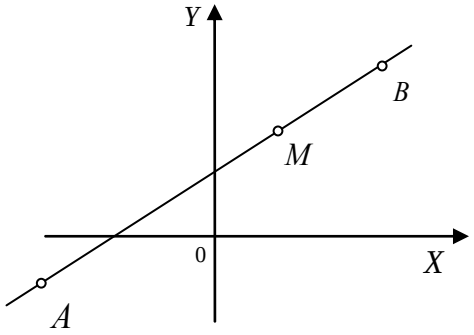


Рис. 3.4

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A); \quad \vec{AM} = (x - x_A; y - y_A)$$

Оскільки вектори лежать на одній прямій, то вони колінеарні а, отже, їхні координати пропорційні

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \tag{3.10}$$

Отримали рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Приклад. Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1; 2)$ *і* $B(2; 1)$.

Розв'язання. Згідно рівняння (3.10), враховуючи, що x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2=1, маємо:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{1-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$$

після відповідних спрощень запишемо рівняння шуканої прямої у вигляді

$$x + 3y - 5 = 0.$$

д) Загальне рівняння прямої.

Теорема. ***Будь-яке рівняння першого степеня відносно x та y визначає пряму лінію на площині.***

Доведення. Розглянемо довільне рівняння першого степеня відносно x та y

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.11}$$

Це рівняння має нескінченну кількість розв'язків. Нехай (x_0, y_0) – один з цих розв'язків. Тоді

$$Ax_0 + By_0 + C \equiv 0 \tag{3.12}$$

Віднімаючи із рівняння (3.11) рівняння (3.12) одержимо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{3.13}$$

Ліву частину цієї рівності можна розглядати як скалярний добуток векторів $\vec{n} = (A, B)$ та $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$. Ці вектори перпендикулярні тому, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже кінці вектора $\overrightarrow{M_0M}$ належать прямій, що перпендикулярна вектору $\vec{n}$ і проходить через точку M_0. Рівняння (3.11) та (3.13) еквівалентні, тому рівняння (3.11) є рівнянням прямої, перпендикулярної вектору $\vec{n} = (A, B)$, що і треба було довести.

Означення *Рівняння вигляду* $Ax + By + C = 0$ *називають* ***загальним рівнянням прямої.***

Це рівняння при різних числових значеннях A, B, C визначає деяку пряму на площині. Проведемо дослідження загального рівняння прямої.

Нехай в загальному рівнянні (3.11) вільний член C=0. Тоді рівняння матиме вигляд *Ax+By=0*. Це рівняння задовольняють координати точки O(0;0). Тому в цьому випадку (C=0) пряма проходить через початок координат.

Нехай в рівнянні (3.11) A=0. Тоді рівняння приймає вигляд:

$$By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}. \qquad (3.14)$$

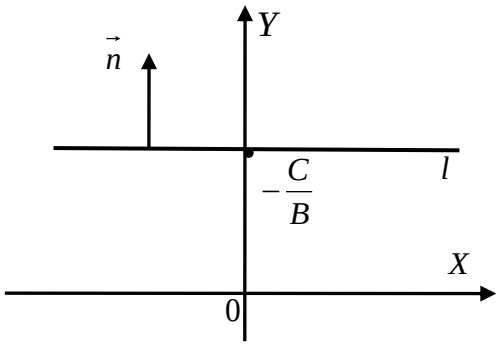


Рис. 3.5.

У цьому випадку пряма перпендикулярна вектору $\vec{n} = (0, B)$, який є паралельним осі *Oy*, тому пряма паралельна осі *Ox* і відтинає від осі *Oy* відрізок, що дорівнює $-\frac{C}{B}$ (рис. 3.5).

Якщо в рівнянні (3.11) коефіцієнт B=0, то воно приймає вигляд

$$Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A} \qquad (3.15)$$

Рівняння (3.15) є рівнянням прямої, яка паралельна осі *Oy* і відтинає від осі *Ox* відрізок, що дорівнює $-\frac{C}{A}$.

Якщо в загальному рівнянні прямої A=C=0, тоді рівняння приймає вигляд $y = 0$ і є рівнянням осі *Ox*.

Якщо B=C=0, тоді загальне рівняння приймає вигляд *x=0* і буде рівнянням осі *Oy*.

Для побудови прямої у системі координат *xOy*, заданої загальним рівнянням, необхідно знайти будь-які дві точки, що належать даній прямій (наприклад - точки перетину прямої з осями координат) і через ці дві точки провести пряму. *Якщо в рівнянні покласти x=0, то одержимо точку перетину прямої з віссю Oy.* При *y=0* одержуємо точку перетину прямої з віссю *Ox.*

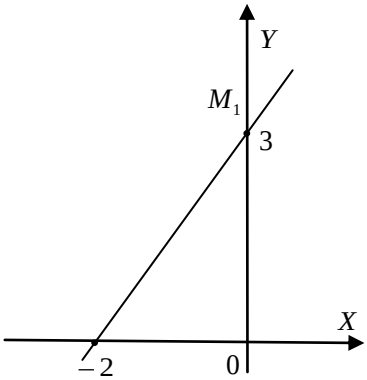


Рис.3.6

Приклад. Побудувати лінію, рівняння якої $3x - 2y + 6 = 0$.

Розв'язання. Задано рівняння першого степеня відносно *x* та *y* , тому ця лінія пряма, її рівняння задано у загальному вигляді. Для побудови цієї прямої знайдемо точки її перетину з осями координат.

При $x = 0$ маємо $-2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$. При $y = 0$ маємо $3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$, отже пряма

проходить через точки $M_1(0,3)$ та $M_2(-2,0)$. Через ці дві точки можна провести лише одну пряму (рис. 3.6).

е) Рівняння прямої «у відрізках»

Пряма l, в загальному випадку, перетинає осі системи координат в деяких точках $K(a;0)$ і $N(0;b)$ (рис. 3.7). Оскільки точки K і N лежать на прямій, то їх координати задовольняють загальне рівняння даної прямої

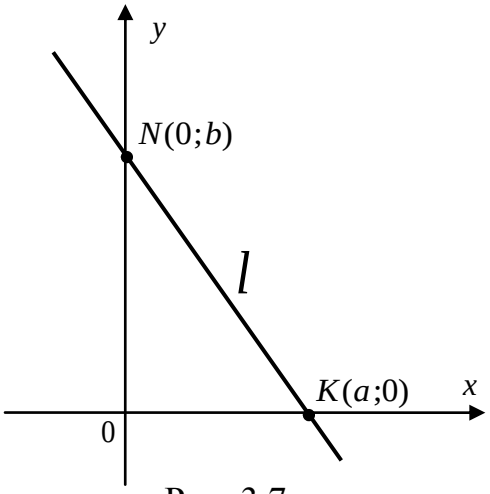


Рис. 3.7

$$K(a;0) \in l \Rightarrow A\cdot a + B\cdot 0 + C = 0 \Rightarrow A = -\frac{C}{a}$$

$$N(0;b) \in l \Rightarrow A\cdot 0 + B\cdot b + C = 0 \Rightarrow B = -\frac{C}{b}$$

Підставимо знайдені значення в загальне рівняння прямої

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0 \Rightarrow -C\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = -C \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Отримали рівняння прямої «у відрізках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3.16)$$

де a і b - відрізки, які відтинає дана пряма на координатних осях, відраховуючи від початку координат. Зауважимо, що значення a і b можуть бути від'ємними, що відповідає випадку, коли відрізки відтинаються на від’ємних частинах осей.

Структура даного рівняння є «досить чутливою» як до знаків так і до величини параметрів, які входять в рівняння. Тому рівняння прямої «у відрізках» має «жорстку» конструкцію:

а) в чисельнику – тільки координати x і y;

б) знак між дробами повинен бути завжди «+»;

в) в правій частині – «1»

Приведемо приклади рівнянь, які «подібні» до рівняння прямої «у відрізках», але не є ними в закінченому вигляді (табл. 1).

Таблиця 1

Рівняння прямої, яке «подібне» до прямої «у відрізах»	Рівняння прямої «у відрізках»
$\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$	$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1 \quad a = 5;\ b = -2$

$-\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$	$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1 \quad a=-3;\ b=4$
$-\frac{x}{7}-\frac{y}{9}=1$	$\frac{x}{-7}+\frac{y}{-9}=1 \quad a=-7;\ b=-9$
$\frac{x}{7}+\frac{y}{6}=-1$	$\frac{x}{-7}+\frac{y}{-6}=1 \quad a=-7;\ b=-6$
$\frac{x}{-8}+\frac{y}{3}=-1$	$\frac{x}{8}+\frac{y}{-3}=1 \quad a=8;\ b=-3$

Приклад. Побудувати пряму $-3x+5y+15=0$ за допомогою її рівняння «у відрізках».

Розв'язання. Знайдемо рівняння прямої у відрізках

$$-3x+5y+15=0 \Rightarrow 3x-5y=15 \Rightarrow \frac{3x-5y}{15}=\frac{15}{15} \Rightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1.$$

Отже, a = 5, b = -3. Відкладаємо на осі Ох 5 одиниць в додатному напрямку, одержуємо точку А. Аналогічно знаходимо точку В, відклавши по осі $0y$ три одиниці у від'ємному напрямку. Проводимо пряму через знайдені точки.

§3.3 Кут між двома прямими на площині

Нехай в системі координат маємо дві довільні прямі l_1 і l_2, що задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом

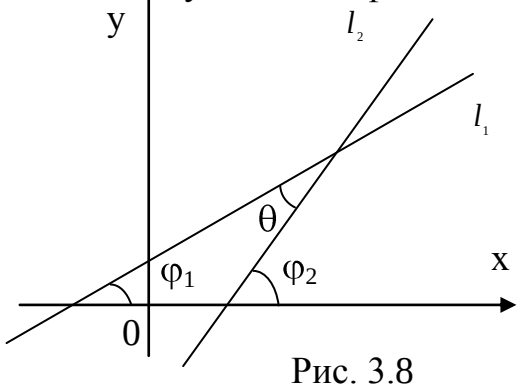


Рис. 3.8

$l_1: \ y=k_1x+b_1$

$l_2: \ y=k_2x+b_2$ (Рис. 3.8)

Враховуючи залежність між кутами трикутника маємо $\varphi_2=\varphi_1+\theta \Rightarrow \theta=\varphi_2-\varphi_1$. Знайдемо тангенс кута між прямими

$$tg\theta=tg(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{tg\varphi_2-tg\varphi_1}{1+tg\varphi_1 tg\varphi_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

отже

$$tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (3.17)$$

Проаналізуємо отримане співвідношення:

- якщо прямі паралельні то $\theta=0^\circ$ і, відповідно, $tg0^\circ=0$.

  отже $k_1=k_2$ - умова паралельності двох прямих.

- якщо прямі перпендикулярні то $\theta=90^\circ$, а $tg90^\circ$ - не існує $\Rightarrow$

дріб не існує, якщо його знаменник дорівнює нулю. Отже

$1+k_1k_2=0$, тому $k_2=-\frac{1}{k_1}$ - умова взаємної

перпендикулярності двох прямих.

Отже умови паралельності та перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

- якщо $l_1 \parallel l_2$ то $k_1=k_2$ (3.18)
- якщо $l_1 \perp l_2$ то $k_1 \cdot k_2=-1$. (3.19)

Приклад . Обчислити кут між прямими

(l_1) $y = 2x + 3$, (l_2) $y = -3x_2 + 2$.

Розв'язання. В нашому випадку $k_1 = 2$, а $k_2 = -3$, за формулою (3.17) маємо:

$$tg\varphi=\frac{-3-2}{1+2(-3)}=1 \Rightarrow tg\varphi=1 \Rightarrow \varphi=45^\circ$$ Відповідь: 45°.

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2=0$, то кут між заданими прямими можна замінити на кут між векторами, перпендикулярними до відповідних прямих: $\vec{s}_1=(A_1;\ B_1)$ і $\vec{s}_2=(A_2;\ B_2)$

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \quad (3.20)$$

Якщо прямі паралельні, то і вектори будуть паралельні.
Тоді умова паралельності прямих має такий вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \quad (3.21)$$

А умовою їх перпендикулярності буде співвідношення:

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \quad (3.22)$$

Нормальне рівняння прямої має вигляд

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0 \quad (3.23)$$

Тут p - довжина перпендикуляра, що проведений з початку координат на пряму, α - кут, який перпендикуляр утворює з додатнім напрямом осі *Ox*. Для зведення загального рівняння прямої (3.11) до нормального виду необхідно обидві частини його помножити на нормуючий множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (3.24)$$

Знак нормуючого множника μ вибирається протилежним знаку вільного члена С рівняння (3.11).

Приклад. Загальне рівняння прямої 4x - 3y + 12 = 0 записати в нормальному вигляді.

Розв'язання. В даному випадку вільний член в загальному рівнянні дорівнює +12, отже нормуючий, множник беремо зі знаком мінус. A = 4, B = -3 тому

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}$$

Помноживши на -1/5 обидві частини рівняння 4x - 3y + 12 = 0, приведемо його до нормального виду і одержимо:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0$$

Зауваження. Необхідно пам'ятати, що в нормальному рівнянні прямої сума квадратів коефіцієнтів при поточних координатах повинна дорівнювати одиниці, а вільний член повинен бути від'ємним.

Відстань від точки до прямої.

Відстань від точки $M(x_м; y_м)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається довжиною перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму, і обчислюється за формулою:

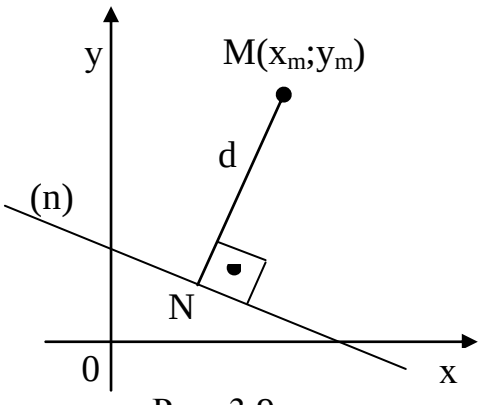


Рис. 3.9

$$d = \left| \frac{A \cdot x_м + B \cdot y_м + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (3.25)$$

Правило. *Щоб обчислити відстань від точки* $M(x_м; y_м)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$, *необхідно дане рівняння прямої звести до нормального виду, потім в ліву частину отриманого рівняння підставити замість поточних координат* $(x; y)$ *координати даної точки* $(x_м; y_м)$. *Абсолютна величина отриманого числа і буде шуканою величиною відстані.*

Приклад . Обчислити відстань від точки M(2;5) до прямої 6x+8y-5=0.

Розв'язання. Згідно наведеного правила зведемо дане рівняння прямої до нормального вигляду. Обчислюємо нормуючий множник

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{1}{10}$$

Рівняння прямої нормального виду запишеться так:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0$$

Далі в праву частину цього рівняння підставимо координати даної точки. Абсолютна величина одержаного числа і дасть шукану відстань.

$$d=\left|\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot 5-\frac{1}{2}\right|=\frac{47}{10}$$

Відповідь: d = 4,7.

Відстань від точки до прямої є величина завжди додатна, крім відстані від точки до прямої розглядається ще і відхилення точки від прямої.

Відхиленням δ даної точки від заданої прямої є відстань від цієї точки до прямої, взята зі знаком плюс, коли точка і початок координат знаходяться по різні сторони від прямої, і зі знаком мінус, якщо точка і початок координат знаходяться по одну сторону від прямої.

Висновок. Відстань від точки до прямої дорівнює абсолютній величині відхилення цієї точки від прямої: d = | δ |.

Приклад . Як розташовані початок координат і точка B(1/6; 1/4) відносно прямої 6x + 8y - 5 = 0.

Розв'язання. Запишемо рівняння даної прямої в нормальному вигляді:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0$$

Далі в праву частину рівняння підставимо координати заданої точки. Одержане число буде визначати відхилення даної точки від прямої.

$$\delta=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}$$

Відповідь: Відхилення від'ємне, отже точка B(1/6; 1/4) і початок координат знаходяться по одну сторону відносно даної прямої.

Приклад. Побудувати пряму $4x + 3y - 6 = 0$, користуючись її рівнянням з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання. Приведемо рівняння даної прямої до виду рівняння з кутовим коефіцієнтом: $3y=-4x+6 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+2$, $k=-\frac{4}{3}$

Знайдемо точку перетину прямої з віссю *Oy*.

$x=0 \Rightarrow y=2$. Одержимо точку *A(0;2),* через яку проходить дана пряма. Тепер необхідно побудувати кут, тангенс якого дорівнює - 4/3. Для цього

через точку A проведемо пряму, паралельну осі Ox *і* відкладемо на ній, починаючи від точки A вліво 3 одиниці масштабу, одержимо точку B.

Через точку B, паралельно осі Oy проведемо пряму. На цій прямій в додатному напрямі осі Oy відкладемо чотири одиниці масштабу, одержимо точку M.

Пряма, яка з'єднує точки A і M (Рис.3.10) буде шуканою прямою, оскільки тангенс кута її нахилу до додатного напрямку осі Ox дорівнює - 4/3, і відрізок, який вона відтинає на осі ординат, дорівнює 2.

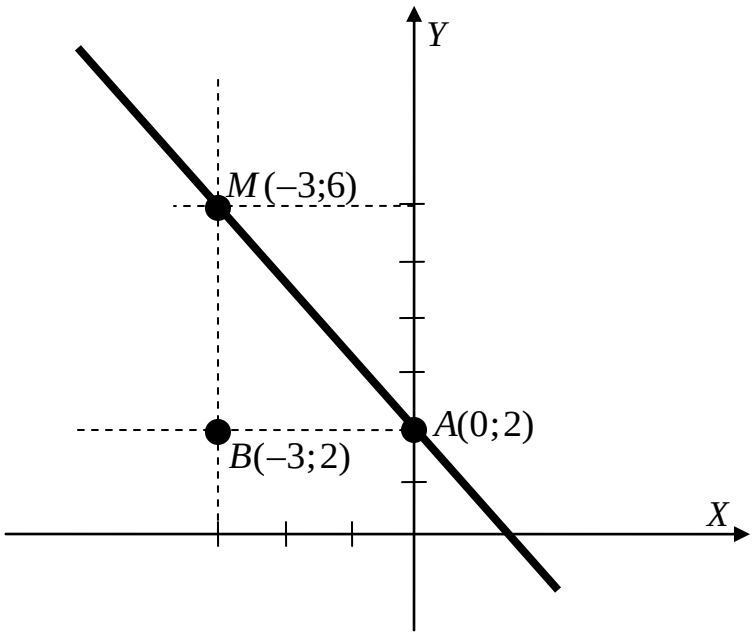


Рис.3.10

Зауваження. Наведені приклади не означають, що всі розглянуті методи побудови прямої однаково зручні. Побудову прямої найпростіше виконувати за допомогою її рівняння у відрізках. Цим методом слід користуватись завжди, коли це можливо.

§ 3.4 Криві лінії другого порядку

Криві лінії другого порядку - це лінії на площині, які в прямокутній декартовій системі координат задаються алгебраїчними рівняннями другого степеня:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3.26)$$

де хоч би один із коефіцієнтів *A, B, C* відмінний від нуля.

Найбільш цікавими серед ліній другого порядку є коло, еліпс, гіпербола і парабола. Властивості кривих другого порядку можна вивчати досліджуючи рівняння (3.26).

§ 3.5 Коло

Означення. **Геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від однієї точки *O,* називається *колом.* Точка *O,* називається *центром кола,* а відстань точок кола до центра називається *радіусом.***

Знайдемо рівняння кола. Позначимо $C(x_0; y_0)$ - центр кола радіуса *R.* Візьмемо довільну точку $M(x; y)$ кола (див. рис. 3.11). Тоді, за означенням кола, $|\overline{CM}| = R$, але $\overline{CM} = (x - x_0; y - y_0)$. Тому $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R.$. Звідси одержимо:

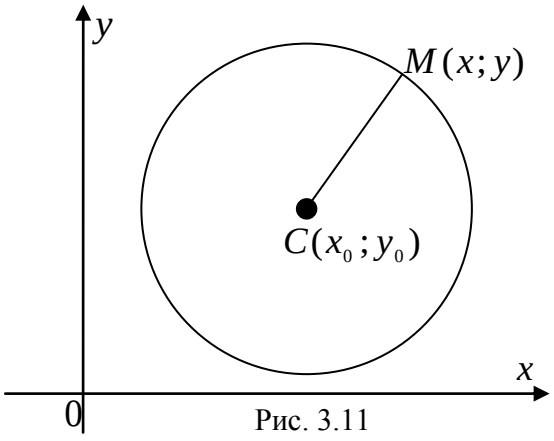


Рис. 3.11

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (3.27)$$

Цю рівність задовольняють координати довільної точки $M(x; y)$, що належить колу, і не задовольняють координати точки, що не належать колу. Отже рівність (3.27) є рівнянням кола, яке називають ***канонічним рівнянням кола.***

Якщо центр кола знаходиться в точці $O(0; 0)$, тоді рівняння кола спрощується і приймає вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (3.28)$$

Виконаємо дії в (3.27), результати якої подано у виразі (3.29).

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 - R^2 = 0 \;\Rightarrow \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0 \;\Rightarrow \\ & \Rightarrow \; x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + Q = 0 \end{aligned} \qquad (3.29)$$

Порівнюючи останнє співвідношення і (3.26), можна зробити висновок, що рівняння (3.26) *може* бути рівнянням кола, якщо A=C і B=0.

§ 3.6 Еліпс

Означення. **Еліпсом *називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок F_1, F_2 (фокусів) є величиною сталою.***

Виберемо систему координат наступним чином: нехай вісь $0x$ проходить через дві задані точки F_1 і F_2, а вісь $0y$ – через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до осі $0x$. Тоді координати фокусів будуть $F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$. Нехай точка $M(x;y)$ належить еліпсу.

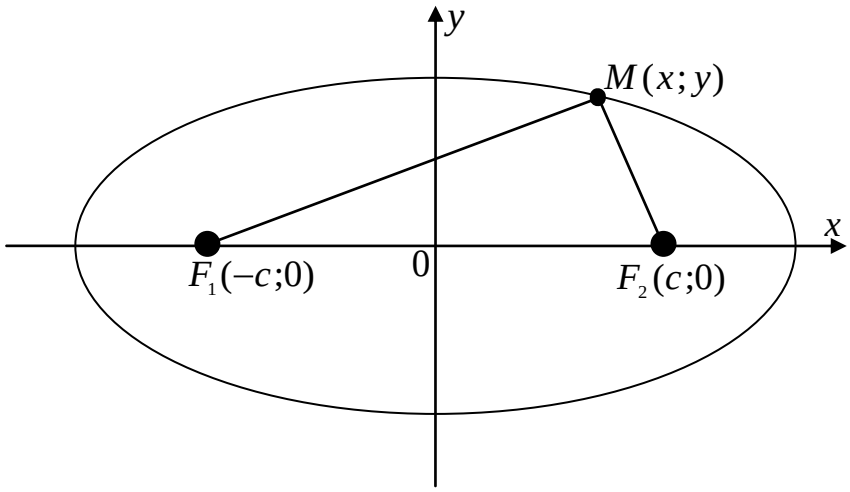


Рис. 3.12

За означенням маємо $|MF_2|+|MF_1|=2a$, або

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (3.30)$$

Будемо спрощувати це рівняння. Перенесемо один корінь у праву частину рівняння та піднесемо до квадрату обидві частини:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Rightarrow -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2.$$

Знову піднесемо до квадрату обидві частини, тоді одержимо

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2-2a^2cx+a^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $a^2(a^2-c^2)$ і одержимо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Оскільки $a^2 > c^2$, то можна позначити

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{3.31}$$

Тоді рівняння матиме вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.32}$$

Якщо центр еліпса знаходиться в точці $D(x_D; y_D)$ і осі системи координат паралельні осям еліпса, то рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{(x - x_D)^2}{a^2} + \frac{(y - y_D)^2}{b^2} = 1 \tag{3.33}$$

Рівняння (3.32) називають ***канонічним рівнянням еліпса.*** Дослідження рівняння еліпса дозволяє зробити висновок, що параметри рівняння *a* та *b* дорівнюють півосям еліпса, що розташовані на осях координат *Ox* та *Oy*, відповідно. Еліпс має форму зображену на Рис. 3.12.

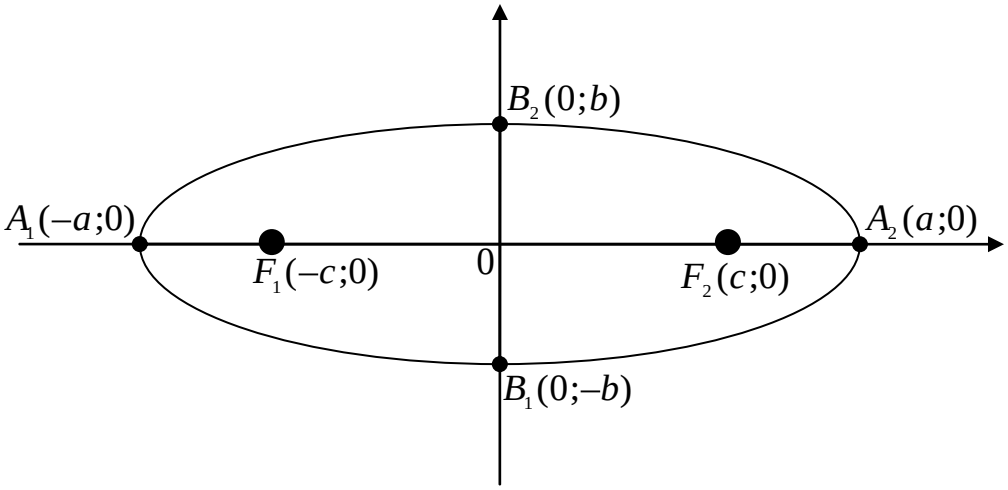


Рис. 3.13

Точки перетину еліпса з координатними осями називаються *вершинами еліпса.* Вершини еліпса мають координати: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ (Рис. 3.13). Відрізок $A_1A_2 = 2a$ *називається великою віссю еліпса,* відрізок $B_1B_2 = 2b$ *– малою віссю еліпса (*$b^2 = a^2 - c^2$*).* Точка перетину осей симетрії еліпса називається *центром еліпса.* Відстань F_1F_2 називається *фокальною відстанню еліпса:* $F_1F_2 = 2c$.

Відношення фокусної відстані до довжини великої осі називають *ексцентриситетом еліпса* і позначається:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \tag{3.34}$$

Оскільки $c < a$ то для еліпса $e < 1$. Для кола ексцентриситет $e = 1$.

Приклад. Дано рівняння еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Обчислити величини a і b координати фокусів еліпса і його ексцентриситет.

Розв'язання. Еліпс задано канонічним рівнянням, тому $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, звідси $a = 4$, $b = 3$. Для визначення координат фокусів застосуємо співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$. Маємо: $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 16 - 9 = 7$. Отже, фокуси еліпса мають координати $F_1(-\sqrt{7};0)$, $F_2(\sqrt{7};0)$. Ексцентриситет еліпса обчислимо за формулою (3.34):

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Відповідь: a = 4; b = 3; $F_1(\sqrt{7}\,;0)$; $F_2(-\sqrt{7}\,;0)$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

§ 3.7 Гіпербола

Означення. **Гіперболою *називається геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок F_1, F_2 (фокусів), є величиною сталою* (*Рис. 3.14*).**

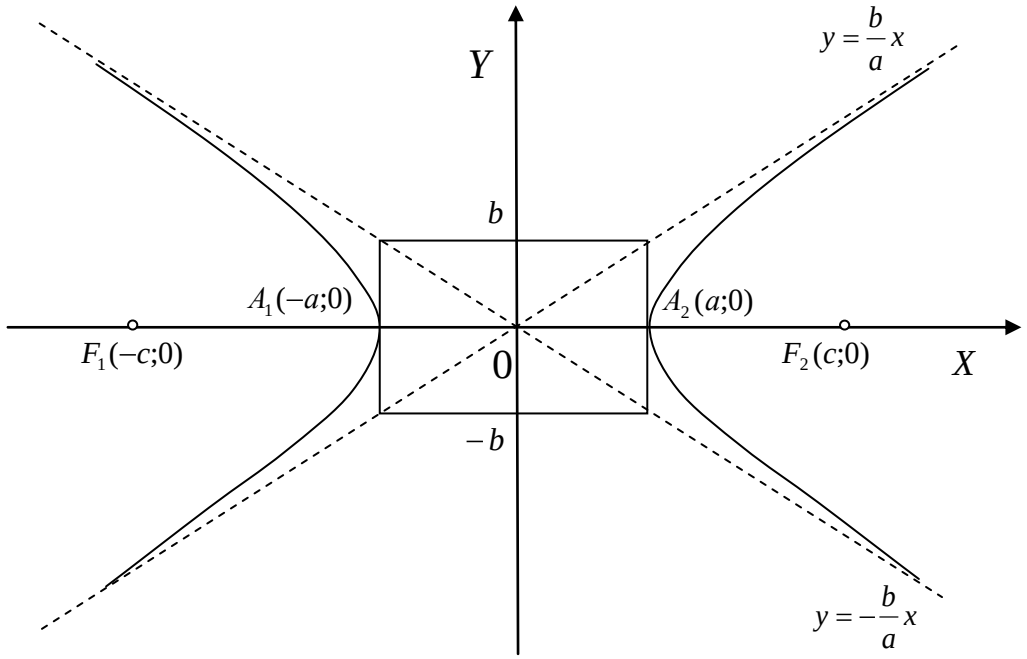


Рис. 3.14

Виберемо систему координат наступним чином: нехай вісь $0x$ проходить через дві задані точки F_1 і F_2, а вісь $0y$ – через середину відрізка F_1F_2. Тоді координати фокусів будуть $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Нехай точка $M(x; y)$ належить гіперболі. За означенням маємо

$$\left|MF_2 - MF_1\right| = 2a \text{, або } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \qquad (3.35)$$

Провівши викладки, аналогічні попередньому параграфу та ввівши позначення $b^2 = c^2 - a^2$, канонічне рівняння гіперболи набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3.36)$$

Точки перетину гіперболи з віссю *Ox* $A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$ називаються *вершинами гіперболи.* Відрізок A_1A_2 називається *дійсною віссю гіперболи.* Вісь *Oy* гіпербола не перетинає. Якщо на осі *Oy* узяти точки $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$, то відрізок B_1B_2 називається *уявною віссю гіперболи.* Прямі

$$(1)\ y = \frac{b}{a}x\ ;\ (2)\ y = -\frac{b}{a}x \qquad (3.37)$$

називаються *асимптотами гіперболи*.

Гіпербола складається з двох частин, які називаються *гілками гіперболи.*

Відношення фокусної відстані до довжини дійсної осі називається *ексцентриситетом гіперболи.*

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

оскільки $c > a$, то для гіперболи $e > 1$.

Приклад. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Знайти довжини дійсної і уявної осей гіперболи, координати фокусів. Записати рівняння асимптот гіперболи.

Розв'язання. Гіперболу задано канонічним рівнянням, а тому $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, звідси довжина дійсної осі $2a = 8$, уявної осі $2b = 6$. Для визначення координат фокусів скористаємося співвідношенням $b^2 = c^2 - a^2$. Маємо $c^2 = a^2 + b^2$ або $c^2 = 16 + 9 = 25$. Отже, фокуси гіперболи мають координати: $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$. Згідно формул (3.37) рівняння асимптот гіперболи будуть мати відповідно вигляд: $y = \frac{3}{4}x$, $y = -\frac{3}{4}x$

Відповідь: 8; 6; $F_1(5; 0)$; $F_2(-5; 0)$; $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Якщо центр гіперболи знаходиться в точці $D(x_D; y_D)$ і осі системи координат паралельні осям гіперболи, то рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{(x-x_D)^2}{a^2}-\frac{(y-y_D)^2}{b^2}=1 \qquad (3.38)$$

Якщо, в результаті перетворень, приходимо до рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$, або $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, то така гіпербола перетинає вісь *Oy* і не перетинає вісь *Ox*. Така гіпербола називається ***спряженою*** до гіперболи (3.36).

§ 3.8 Парабола

Означення. **Параболою *називається геометричне місце точок рівновіддалених від даної точки F (фокус) і даної прямої l (директриса).***

Виберемо систему координат так, щоб вісь 0x проходила через задану точку *F* і перпендикулярно до заданої прямої (директриси), а вісь 0y – паралельно директрисі через середину відрізка між фокусом і директрисою. В такій системі координат канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2=2px \qquad (3.39)$$

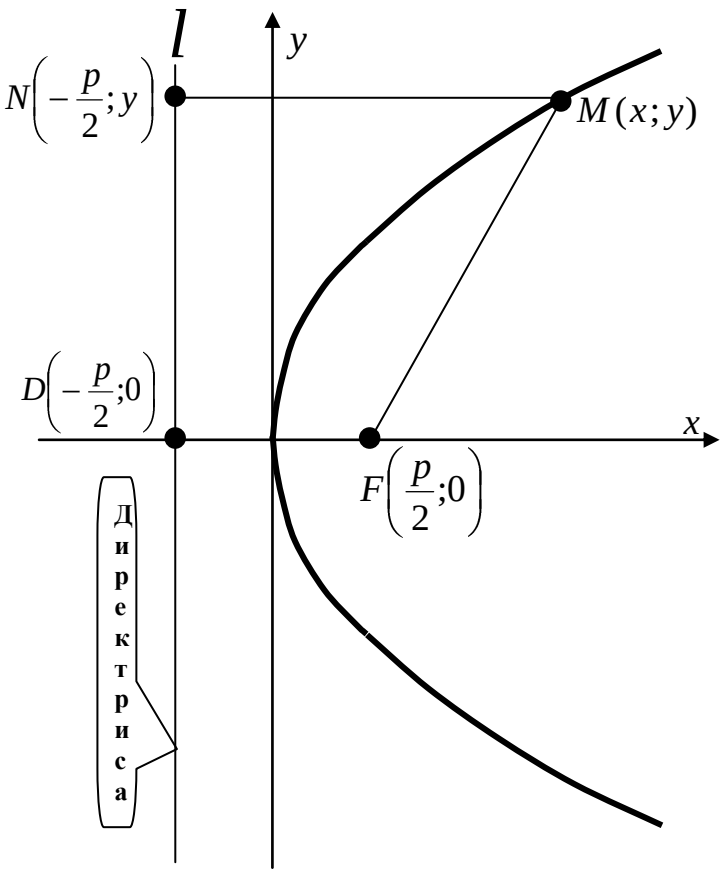


Рис. 3.15

Точка перетину параболи з віссю *Ox* називається *вершиною параболи.* Вершина параболи співпадає з початком координат. Парабола лежить правіше вісі *Oy* і симетрична відносно осі *Ox* (рис.3.15). Рівняння директриси параболи: $x = -\frac{p}{2}$. Фокус параболи має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

Якщо вершина параболи не співпадає з початком координат але осі симетрії паралельні осям системи координат, то рівняння параболи буде

$$(y - y_C)^2 = 2p(x - x_C) \qquad (3.40)$$

Приклад. Записати рівняння параболи, якщо відстань від фокуса до вершини дорівнює 3.

Розв'язання. Фокус параболи має координати $F\left(p/2;0\right)$,

отже $0{,}5p = 3 \Rightarrow p = 6$.

Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$.Тому рівняння даної параболи має вигляд $y^2 = 12x$.

§ 3.9 Рівняння площини у просторі

Кожне лінійне рівняння в декартових координатах *x, y, z* визначає площину. Вірне і обернене твердження: будь якій площині в просторі відповідає лінійне рівняння. Загальне рівняння площини мас вигляд:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3.41)$$

Якщо в рівнянні (3.41) деякі з коефіцієнтів *A,B,C,D* дорівнюють нулю, то такі рівняння називаються неповними рівняннями площини. Особливість розташування площин, які задаються неповними рівняннями у просторі $0xyz$ визначаються певними правилами.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M(x_M; y_M; z_M)$ має вигляд:

$$A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0 \qquad (3.42)$$

Рівняння площини у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (3.43)$$

де *a, b, c* - відрізки які відтинає площина на координатних осях.

Приклад. Звести рівняння площини $x + 2y - 3z + 6 = 0$ до рівняння площини у відрізках.

Розв'язання. Дане рівняння є загальним рівнянням площини. Обчислимо відрізки, які площина відтинає на координатних осях:

- на осі *Ox*, якщо *y = 0, z = 0*, то $x + 6 = 0$, отже $x = -6$ і $a = -6$;
- на осі *Oy*, якщо *x* = 0, *z = 0*, то $2y + 6 = 0$, от $y = -3$ і $b = -3$;
- на осі *Oz*, якщо *x* = 0, *y = 0*, то $-3z + 6 = 0$, отже $z = 2$ і $c = 2$.

Підставивши отримані значення в рівняння (3.43) можемо записати рівняння площини у відрізках.

Відповідь: $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1$.

Рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ $M_3(x_3; y_3; z_3)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.44)$$

Нормальне рівняння площини має вигляд:

$$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta + z\cdot\cos\gamma - p = 0 \qquad (3.45)$$

В рівнянні (3.45) $\cos\alpha$,. $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - координати одиничного нормального вектора, який опущено із початку координат на площину, α, β, γ – кути, які утворює цей вектор з координатними осями відповідно, p – довжина вектора.

Для зведення загального рівняння площини (3.41) до нормального вигляду необхідно його помножити на нормуючий множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (3.46)$$

Знак нормуючого множника μ протилежний знаку вільного члена *D*.

Якщо площини задано загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

то кут між ними обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (3.47)$$

Умова перпендикулярності двох площин має вигляд:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{3.48}$$

Умова паралельності двох площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{3.49}$$

Приклад. Обчислити косинус кута між двома площинами:

$5x - 3y + 4z - 4 = 0$ і $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

Розв'язання. За формулою (3.47), враховуючи, що $A_1=5$; $b_1 = -3$; $C_1 = 4$; $A_2 = 3$; $B_2 = -4$; $C_2 = -2$, одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}} = \frac{19}{5\sqrt{58}}$$

Відповідь: $\cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}}$

Відстань від точки $P(x_1; y_1; z_1,)$ до площини $Ax+By+Cz+D= 0$. визначається довжиною перпендикуляра, опущеного із даної точки на площину, і обчислюється за формулою:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \tag{3.50}$$

Відстань від точки до площини є величиною додатною. Крім відстані від точки до площини розглядається ще і відхилення точки від площини. Відстань від точки до площини дорівнює абсолютній величині відхилення точки від площини $d = |\delta|$.

Зауваження. Слід звернути увагу на схожість обчислення відстані і відхилення точки від площини з обчисленням відстані і відхилення точки від прямої на площині.

Приклад. Обчислити відстань від точки $A(2; 3; -1)$ до площини

$7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Розв'язання. Відстань від точки до площини обчислюємо за формулою (3.50), в якій $A = 7$, $B = -6$, $C = -6$, $D = 42$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $z_1 = -1$. Підставляючи ці значення у формулу (3.50), одержимо $d = 4$.

Відповідь: $d = 4$.

§ 3.10 Пряма лінія у просторі

Канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{3.51}$$

де $x_1; y_1; z_1$ – координати точки, через яку проходить дана пряма.

l, m, n координати напрямного вектора даної прямої $\vec{q} = (l; m; n)$.

У випадку, коли у рівнянні (3.51) один із знаменників дорівнює нулю, то відповідний чисельник теж дорівнює нулю.

Приклад. Визначити положення прямої $\frac{x-4}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{4}$

Розв'язання. Дану пряму задано канонічним рівнянням (3.51). Оскільки *l* = 0 то *x* - 4 = 0.

Відповідь: пряма розташована в площині *x* = 4, проходить через точку $M_0(4;1;-5)$ та паралельна напрямному вектору $\vec{q} = (0;3;4)$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{3.52}$$

Параметричне рівняння прямої випливає із канонічного рівняння (3.51) і має вигляд:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases} \tag{3.53}$$

Рівняння прямої як лінія перетину двох площин може бути задане у вигляді системи двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

В даному випадку напрямний вектор знаходиться за формулою

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \tag{3.55}$$

Приклад. Рівняння прямої $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$ звести до канонічного виду.

Розв'язання. Дану пряму задано, як лінію перетину двох площин. Канонічне рівняння прямої у просторі має вигляд (3.51), Знайдемо напрямний вектор $\vec{q}$:

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}$$

Отже, вектор $\vec{q}$ має координати $\vec{q} = (-11; 17; 13)$.

За точку M_1 візьмемо точку перетину цієї прямої з площиною yOz, тоді $x = 0$ і з (3.54) одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $y_1 = 2$, $z_1 = 1$. Отже, точка M_1 має координати: $M_1(0;2;1)$ і канонічне рівняння прямої отримаємо після підстановки координат напрямного вектора і точки M_1 у рівняння (3.51).

Відповідь: $\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$

Зауваження. Існує інший спосіб зведення рівняння (3.54) до рівняння (3.51). Суть цього способу полягає в тому, що в рівнянні (3.54) x спочатку виражається через z для цього виключаємо y: $x = f(z)$. Потім x виражаємо через y, для цього виключаємо z: $x = \varphi(y)$. Одержуємо рівняння $x = \varphi(y) = f(z)$.

Якщо прямі задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \qquad (\nu_1)$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \qquad (\nu_2)$$

то напрямними векторами цих прямих будуть відповідно вектори $\vec{q}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{q}_2 = (l_2; m_2; n_2)$.

Кут між прямими ν_1 і ν_2 визначається як кут між напрямними векторами:

$$\cos(\nu_1 \wedge \nu_2) = \cos(q_1 \wedge q_2) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad (3.56)$$

Із формули (3.56) одержуємо умову перпендикулярності прямих:

- якщо $\nu_1 \perp \nu_2$, то $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ (3.57)

якщо прямі паралельні, то $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$. (3.58)

Приклад. Знайти косинус гострого кута між прямими:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}; \qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-2}$$

Розв'язання. Кут між двома прямими визначається за формулою (3.56), в якій потрібно взяти $l_1 = 3$, $m_1 = 1$, $n_1 = 2$; $l_2 = 2$, $m_2 = 4$, $n = -2$. Підставивши ці значення у формулу (3.56), одержимо $\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{21}}$.

Відповідь: $\cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{21}}$.

§ 3.11 Пряма і площина

Якщо прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (\nu_1)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad (\nu_2)$$

то умова належності цих прямих одній площині має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.59)$$

Якщо величини l_1, m_1, n_1 непропорційні величинам l_2, m_2, n_2, то співвідношення (3.59) є необхідною і достатньою умовою перетину двох прямих у просторі.

Нехай пряма задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$, а площина – рівнянням загального виду $Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді кут між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (3.60)$$

Із формули (3.60) одержуємо умови паралельності і перпендикулярності прямої l і площини α.

- якщо $l \perp \alpha$, то $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$; (3.61)

- якщо $l \parallel \alpha$, то $Al + Bm + Cn = 0$ (3.62)

Умова належності прямої $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

площині $Ax + By + Cz + D = 0$ виражається системою

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Приклад. Перевірити, що пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ лежить у площині $x + y - z - 6 = 0$.

Розв'язання. В нашій умові $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $z_1 = -1$; $l = 2$; $m = 1$; $n = 3$; $A = 1$; $B = 1$; $C = -1$.

Відповідь: Перша і друга рівності умови (3.63) виконується і тому пряма лежить в площині.

Надалі, при розв'язуванні задач на пряму і площину, необхідно визначитись якою формою рівняння прямої і площини зручно користуватись у даному конкретному випадку.

Приклад. Через пряму $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{4}$ провести площину паралельну площині $x + y - z + 15 = 0$.

Розв'язання. Задача має розв'язок, якщо пряма l паралельна площині α. В нашому випадку це має місце, оскільки $1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 0$. Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $A_1(x - a) + B_1(y - b) + C_1(z - c) = 0$. Із умови паралельності площини α і прямої l робимо висновок, що $\frac{A_1}{1} = \frac{B_1}{1} = \frac{C_1}{-1}$, тобто можна взяти: $A = 1$; B, $= 1$; $C = -1$.

Оскільки площина проходить через задану пряму, то можна покласти $a = -5$; $b = 2$; $c = 0$. Отже, шукане рівняння має вигляд: $(x + 5) + (y - 2) - z = 0$ або $x + y - z + 3 = 0$.

Відповідь: $x + y - z + 3 = 0$.

§ 3.12 Вправи на закріплення

1. Яка лінія визначається рівнянням $y=-1+\sqrt{4-x^2}$?

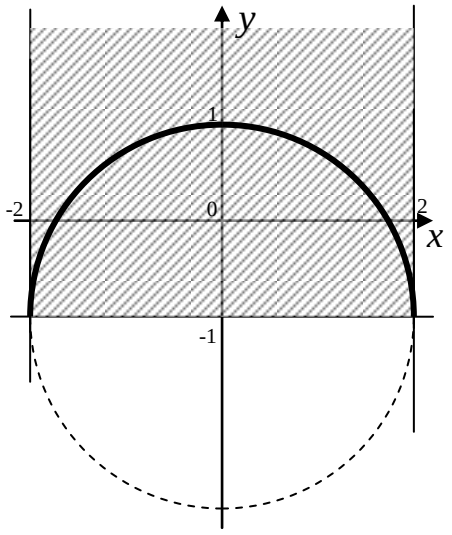


Рис. 3.16

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ виразу: $4-x^2\ge 0 \Rightarrow |x|\le 2$. Перепишемо задане рівняння у вигляді $y+1=\sqrt{4-x^2}$, та запишемо додаткову умову, оскільки права частина – не від'ємна: $y+1\ge 0 \Rightarrow y\ge -1$. Таким чином, графік лінії розташований на частині площині, що обмежена лініями $x=\pm 2;\ \ y=-1$ (Рис. 3.16). Піднесемо до квадрату останнє рівняння

$$y+1=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow (y+1)^2=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(y+1)^2=4-x^2 \Rightarrow (y+1)^2+x^2=4.$$

Отримали рівняння кола з центром в т. $C(0;-1)$ і радіусом $R=2$. Враховуючи ОДЗ та умову $y\ge -1$, робимо висновок, що початкове рівняння представляє собою дугу - верхню частину кола.

2. Встановити, яка лінія визначається рівнянням $x=-2\sqrt{1+y^2}$?

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ виразу: $y\in R$. Додаткова умова $x<0$. Піднесемо до квадрату $x=-2\sqrt{1+y^2} \Rightarrow x^2=4(1+y^2) \Rightarrow \frac{x^2}{4}-y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$.

Початковий вираз, після піднесення до квадрату, звівся до канонічного рівняння гіперболи з півосями $a=2;\ b=1$. Враховуючи умову $x<0$, робимо висновок, що початкове рівняння представляє ліву вітку гіперболи (Рис.3.17).

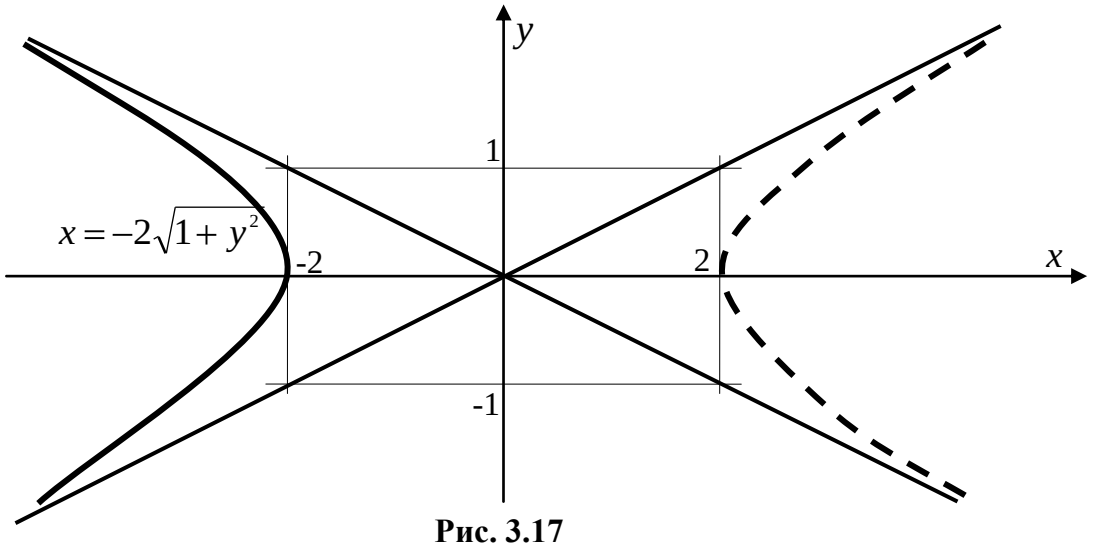


Рис. 3.17

3. Встановити, яку лінію визначає рівняння $2x^2+y^2-4x+4y-10=0$?

Згрупуємо члени рівняння з x та y і виділимо повні квадрати, якщо це можливо.

$2x^2+y^2-4x+4y-10=0 \Rightarrow (2x^2-4x)+(y^2+4y)-10=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2-2x+1)-2+(y^2+4y+4)-4-10=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x-1)^2+(y+2)^2=16 \Rightarrow \frac{2(x-1)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{16}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{8}+\frac{(y+2)^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1.$

Отримали рівняння еліпса з центром в т. $C(1;-2)$. Мала піввісь $a=2\sqrt{2}$, велика $b=4$. Оскільки велика вісь розташована на прямій, паралельній осі $0y$, то $c^2=b^2-a^2=16-8=8 \Rightarrow c=2\sqrt{2}$. Тоді $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.(Рис.3.18)

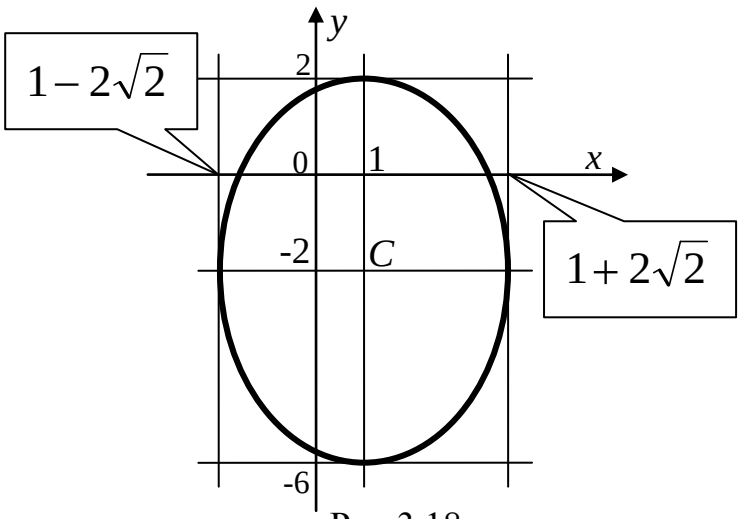


Рис.3.18

4. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо:

а) відстань між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь $b=3$;

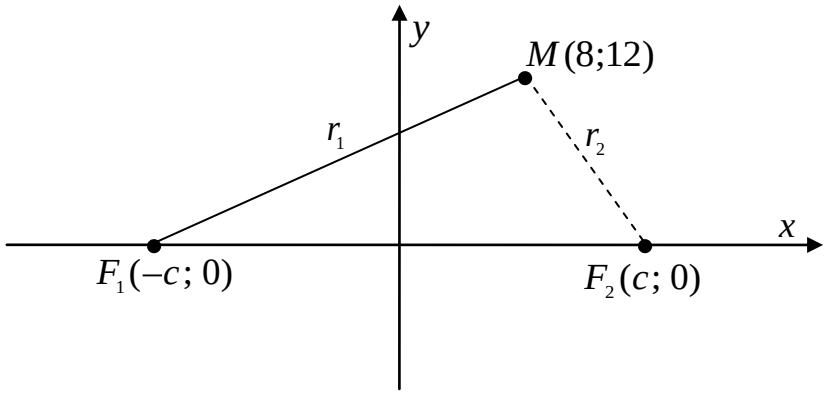
б) велика піввісь $a=6;\ \varepsilon=0{,}5$.

Розв'язання: а) За умовою задачі $2c=8,\ b=3$. Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо $a^2=9+16=25$. Отже, канонічне рівняння еліпса з центром в початку координат має вигляд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;$

б) згідно з умовою $\varepsilon=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{c}{6} \Rightarrow c=3$. Враховуючи, що $b^2=a^2-c^2$ маємо $b^2=27$. Тому канонічне рівняння еліпса з центром в початку координат має вигляд $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1.$

5. Написати рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відома точка еліпса $M_1(8;12)$ та відстань $r_1 = 20$ від неї до лівого фокуса.

Розв'язання: Згідно умови задачі маємо рисунок. Відстань від точки $M(8;12)$ до фокуса $F_1(-c;0)$ дорівнює 20.



З формули відстані між двома точками ця відстань дорівнює $\sqrt{(8+c)^2+144}$.
Отже, отримуємо рівняння відносно невідомого параметра c:
$20 = \sqrt{(8+c)^2+144} \Rightarrow 400 = (8+c)^2 + 144 \Rightarrow (8+c)^2 = 256 \Rightarrow 8+c = 16 \Rightarrow c = 8.$
Фокальні радіуси точки еліпса представлені формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon \cdot x; \qquad r_2 = a - \varepsilon \cdot x$$

де x - абсциса точки еліпса.
В нашому випадку відомі координати точки $M(8;12)$. Тому можна записати

$$r_1 = a + \varepsilon \cdot x \Rightarrow\ 20 = a + \varepsilon \cdot 8 \ \Rightarrow\ 20 = a + 8\frac{c}{a} \ \Rightarrow 20 = a + \frac{64}{a} \ \Rightarrow a^2 - 20a + 64 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-16)(a-4) = 0 \ \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 16 \\ a_2 = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1^2 = a_1^2 - c^2 \\ b_2^2 = a_2^2 - c^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1^2 = 192 \\ b_2^2 = -48. \end{bmatrix}$$

Друге значення $a_2 = 4$ не годиться, бо фокуси містяться на осі абсцис (a повинно бути більшим за b).Тому $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1$ - шукане рівняння еліпса.

6. Написати канонічне рівняння параболи, яка проходить через точку $M_1(2;4)$.

Розв'язання: Рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Параметр p знайдемо з умови, що точка M_1 належить параболі, тобто її координати задовольняють рівняння параболи. Отже, $4^2 = 2 \cdot 2 \cdot p$. Звідси $p = 4$.
Тому $y^2 = 8x$ - шукане рівняння параболи.

7. Встановити, що рівняння $y=\frac{1}{4}x^2+x-3$ визначає параболу. Знайти координати її вершини і значення параметра p.

Розв'язання: Зведемо початкове рівняння до рівняння виду $(x-m)^2=2p(y-n)$.

Тоді точка - вершина параболи буде мати координати $(m;\,n)$.

$$y=\frac{1}{4}x^2+x-3 \;\Rightarrow 4y=x^2+4x-12 \;\Rightarrow 4y=x^2+4x+4-16 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y+16=x^2+4x+4 \;\Rightarrow 4(y+4)=(x+2)^2 \;\Rightarrow\; (x+2)^2=4(y+4).$$

Отже, вершина параболи знаходиться в точці $V(-2;\,-4)$, а параметр $p=2$.

§ 3.13 Вправи для самостійного розв'язку

1. Побудувати лінії

1. $x^2 + y^2 = 9$;
2. $x^2 - y^2 = 9$;
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
4. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;
5. $y^2 = 4x$;
6. $x^2 = 2y$;
7. $x^2 + y^2 = 10$;
8. $x^2 - y^2 = 10$;
9. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$;
10. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$;
11. $x^2 = 4y$;
12. $x^2 + y^2 = 8$;
13. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$;
14. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{9} = 1$;
15. $y^2 = \frac{1}{2}x$;
16. $x^2 + y^2 = 25$;
17. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$;
18. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$;
19. $x^2 = \frac{1}{2}y$;
20. $x^2 + y^2 = 20$;
21. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1$
22. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{4} = 1$;
23. $y^2 = 6x$;
24. $x^2 + y^2 = 18$;
25. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{12} = 1$;
26. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{5} = 1$;
27. $(x-3)^2 = \frac{1}{2}(y+1)$;
28. $x^2 + y^2 = 50$;
29. $y^2 - x^2 = 50$;
30. $x^2 = 8y$

2. Звести рівняння ліній до одного з вигляду:

$$x^2 + y^2 = R^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1;$$

$$y^2 = 2px;\ x^2 = 2py$$

і побудувати графік.

1. $16x^2 - 9y^2 = 144;$
2. $9x^2 + 25y^2 = 225;$
3. $2x^2 + 2y^2 = 50;$
4. $y^2 = 12(x+4);$
5. $4x^2 + 25y^2 = 225;$
6. $5x^2 - 9y^2 = 45;$
7. $(x-3)^2 + y^2 = 9;$
8. $x^2 = 4(y+3);$
9. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1;$
10. $12x^2 - 24y^2 = 288;$
11. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0;$
12. $y^2 - 4(x-6) = 0;$
13. $3x^2 + 3y^2 = 75;$
14. $6 - (y-5)^2 = 0;$
15. $10x^2 + 7y^2 = 140;$
16. $4x^2 - y^2 - 16 = 0;$
17. $x^2 - 25 + y^2 = 0;$
18. $x^2 - 9(y+5) = 0;$
19. $16x^2 - 144 - 9y^2 = 0;$
20. $3x^2 + 9y^2 = 27;$
21. $x^2 - y^2 - 36 = 0;$
22. $2x^2 - 4y^2 - 8 = 0;$
23. $y^2 = 10(x+3);$
24. $2x^2 + 3y^2 = 6;$
25. $x^2 + y^2 - 144 = 0;$
26. $5y^2 - 45x^2 = 225;$
27. $(x-3)^2 + y^2 = 0;$
28. $25y^2 + 2x^2 = 50;$
29. $4x^2 - 9y^2 = 36;$
30. $4x^2 - y^2 + 16 = 0;$

3. Привести рівняння $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ до канонічного вигляду, вказати тип лінії і побудувати графік лінії.

№ варіанта	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	**2**	**0**	**5**	**-12**	**10**	**13**
2	**1**	**0**	**-1**	**6**	**4**	**-4**
3	**0**	**0**	**1**	**-2**	**4**	**0**
4	**1**	**0**	**0**	**-10**	**-4**	**13**
5	**9**	**0**	**4**	**-54**	**32**	**109**
6	**4**	**0**	**-6**	**16**	**-12**	**-14**
7	**8**	**0**	**0**	**-16**	**1**	**6**
8	**4**	**0**	**0**	**-1**	**-24**	**32**
9	**9**	**0**	**-1**	**-90**	**-4**	**149**
10	**1**	**0**	**1**	**-4**	**6**	**3**
11	**1**	**0**	**1**	**-6**	**0**	**0**
12	**0**	**0**	**1**	**-2**	**-2**	**-5**
13	**1**	**0**	**1**	**2**	**-4**	**-20**
14	**1**	**0**	**1**	**-4**	**0**	**-5**
15	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**-3**
16	**1**	**0**	**1**	**-10**	**10**	**0**
17	**1**	**0**	**1**	**-6**	**0**	**0**
18	**2**	**0**	**1**	**8**	**6**	**1**
19	**1**	**0**	**1**	**4**	**-6**	**-12**
20	**1**	**0**	**1**	**8**	**-4**	**12**
21	**45**	**0**	**-36**	**-90**	**-24**	**41**
22	**4**	**0**	**3**	**-8**	**12**	**-32**
23	**9**	**0**	**5**	**18**	**-30**	**9**
24	**1**	**0**	**1**	**-6**	**-2**	**-15**
25	**1**	**0**	**-1**	**-4**	**-4**	**-1**
26	**5**	**0**	**1**	**-20**	**-8**	**31**
27	**0**	**0**	**1**	**-3**	**-4**	**7**
28	**1**	**0**	**1**	**8**	**-4**	**11**
29	**8**	**0**	**-9**	**-32**	**-72**	**-184**
30	**4**	**0**	**8**	**24**	**-64**	**-120**

4. Побудувати графік лінії.

1. $y = -3 - \sqrt{9 - x^2}$;
2. $x = 2 - \sqrt{y^2 - 6}$;
3. $y = -1 + \sqrt{4 - x^2}$;
4. $y + \sqrt{x^2 - 4} = 0$;
5. $y = 3 - \sqrt{x + 2}$;
6. $x = 4 + \sqrt{2y^2 + 4}$;
7. $y = 5 - \sqrt{3x^2 + 9}$;
8. $y = -\sqrt{x^2 - 4}$;
9. $x = \sqrt{y + 2}$;
10. $y = 3 - \sqrt{2x^2 + 8}$;
11. $y = 2 + \sqrt{4 - x^2}$;
12. $x = 4 - \sqrt{9 + 3y^2}$;
13. $y = \sqrt{2 - x}$;
14. $x = 9 - \sqrt{8 - 2x^2}$;
15. $y = 3 - \sqrt{x^2 + 4}$;
16. $x = 2 + \sqrt{4 - 2x^2}$;
17. $y = -\sqrt{5 - x}$;
18. $y = 2\sqrt{x}$;
19. $y = -\sqrt{x}$.
20. $x = 2 - \sqrt{y + 5}$

РОЗДІЛ 4 **Функція. Основні поняття**

§ 4.1 Функція. Означення. Область визначення і область значень функцій

Нехай D і E – довільні числові множини.

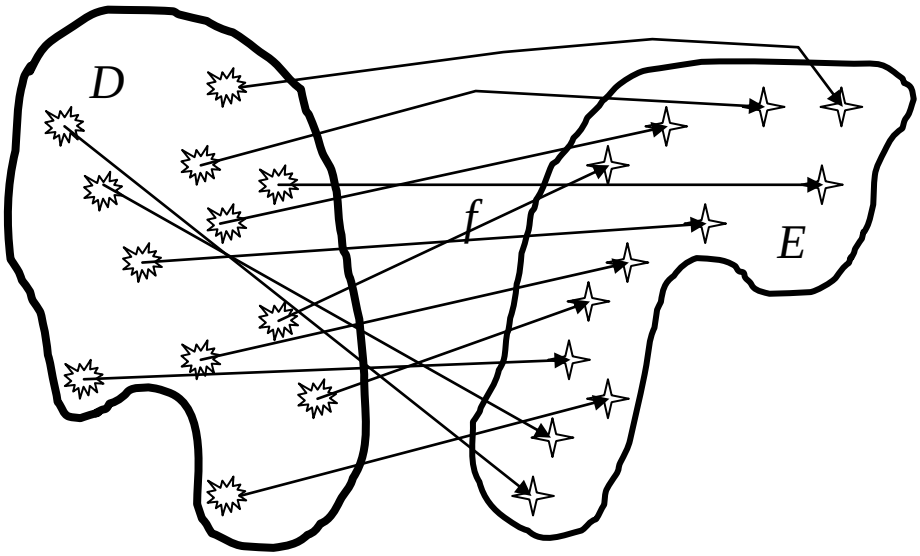


Рис. 4.1

Кажуть, що на множині D визначена числова функція $y = f(x)$, якщо кожному числу $x \in D$ поставлено у відповідність єдине, цілком визначене число $y = f(x) \in E$.(Рис. 4.1)

Множина $D(f)$ називається областю визначення функції або областю допустимих значень незалежної змінної (скорочення ОДЗ), а $E(f)$– областю значення функції ($E(f)$ також називають областю зміни, множиною значень),

$$E(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D(f)\}.$$

Нерідко областю визначення і областю значень функцій $y = f(x)$ позначають так: $D(y)$ – область визначення, $E(y)$– область значень.

Довільний елемент x області визначення $D(f)$ називається незалежною змінною або аргументом, а величина $y = f(x)$ називається залежною змінною або функцією.

Коротко можна сказати, що задано функцію $y = f(x)$, $x \in D(f)$ з областю визначення $D(f)$ і областю значень $E(f)$, іноді записують у наступній формі:

$$f:\ D(f) \to E(f), \text{ або } D \xrightarrow{f} E.$$

§ 4.2 Основні способи задання функції

Щоб задати функцію, потрібно задати спосіб, за допомогою чого для кожного значення аргумента можна було б знайти відповідне значення функції. Існує чотири основні способи задання функції:

1) аналітичний; 2) графічний; 3) табличний; 4) словесний опис.

1) ***Аналітичний спосіб*** задання функції. При аналітичному способі задання функції задається за допомогою формули $y = f(x)$, $f(x)$ - деякий вираз із змінною x.

Наприклад, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \begin{cases} 2x^5, & x \le 0, \\ \sqrt{x+1}, & x > 0. \end{cases}$

Зауваження 1. У математичній літературі найчастіше зустрічається запис функції за допомогою фігурних дужок, якщо функція задана не одним аналітичним виразом. Такий запис є, очевидно, не зовсім конкретним, тобто замість фігурних дужок точніше було писати прямі дужки. Проте, щоб не відступати в загально прийнятих позначень, ми будемо надалі використовувати фігурні дужки.

Якщо функція задається аналітично, то її областю визначення буде множина усіх тих значень x, для кожного з яких формула, що визначає функцію $f(x)$, має зміст. Так, наприклад, для функції $y = x^2$ областю визначення буде множина усіх дійсних чисел, тобто $x \in (-\infty;+\infty) = R$. Для функції $y = \sqrt{x}$ областю визначення є множина невід'ємних дійсних чисел, тобто $x \in [0;+\infty)$.

2) При ***графічному способі*** задання зображують графік функції $y = f(x)$ в системі координат $x0y$.

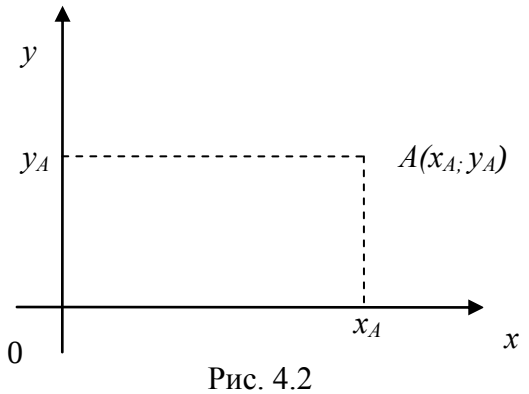


Рис. 4.2

Графіком функції називається зображення на координатній площині множини упорядкованих пар $\{(x;y) \mid y = f(x),\ x \in D(f)\}$. Кожній упорядкованій парі дійсних чисел $(x;y)$ можна поставити у відповідність точку на площині. Для цього на площині зображують прямокутну (декартову) систему координат $x0y$ (Рис.4.2).

Прямі $0x$ та $0y$ взаємно перпендикулярні, 0 – точка перетину цих прямих. $0x$ – ***вісь абсцис***, $0y$ – ***вісь ординат***, 0 – ***початок координат***. На

кожній з осей $0x$ і $0y$ вибирають позитивний напрям відліку (на осі $0x$ – зліва на право, на осі $0y$ – знизу угору). Вибирають також одиницю виміру (масштаб). Кожна точка A на координатній площині має дві координати: x_A – абсцис, y_A – ординату. Записується це так $A(x_A; y_A)$ (Рис.4.2).

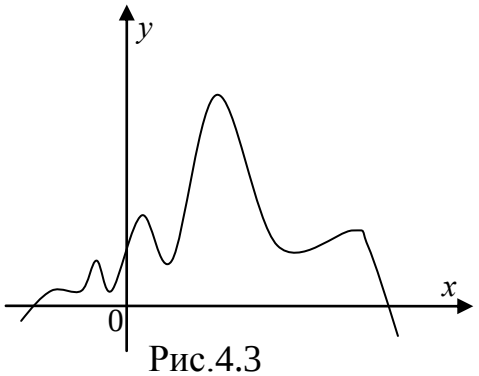
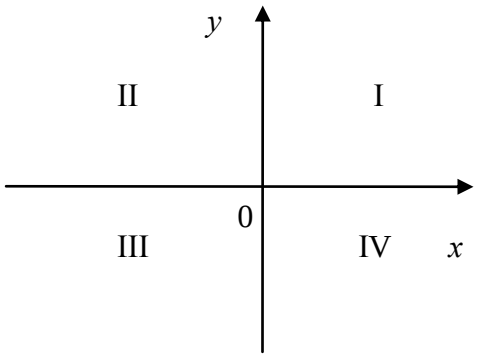


Рис.4.3

Таким чином, графік функції $y = f(x)$ - множина точок координатної площини $x0y$, абсциси яких є значення аргумента x, а ординати – відповідні значення функції y. Для того щоб множина точок координатної площини була графіком деякої функції, необхідно і достатньо, щоб будь-яка пряма, паралельна осі $0y$, перетиналася з цим графіком не більше ніж в одній точці (Рис.4.3)..

Графічний спосіб зручний тоді, коли задати функцію аналітично досить важко.

Зауваження 2. Осі координат розбивають площину на чотири частини – I, II, III, IV – четверті або координатні кути.



3) ***Табличний спосіб*** задання функції полягає в тому, що відповідність між елементами множини $D(f)$ і $E(f)$ задається у формі таблиці.

При цьому способі наводиться таблиця, що вказує значення функцій y_1, y_2, …, y_{n-1}, y_n для наявних в таблиці значень аргумента x_1, x_2, …, x_{n-1}, x_n.

x	y_1	y_2	….	y_{n-1}	y_n
y	x_1	x_2	….	x_{n-1}	x_n

Прикладом табличного способу задання функцій є, наприклад, таблиці квадратів, квадратних коренів, кубів, логарифмів і т.д.

4) При ***словесному способі*** задання функції закон, за яким кожному значенням аргументу ставиться у відповідність одне значення функції, формулюється словесно. Так, наприклад, розмір прибуткового податку є функцією заробітної плати платника податків.

§ 4.3 Парність і непарність функції

Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо:

- функція задана на проміжку $\langle -\alpha ; \alpha \rangle$;
- для будь яких $(-x)\ i\ x$ з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = f(x)$

Якщо функція $y = f(x)$ є парною, то її графік симетричний відносно осі ординат.

Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо для будь яких $(-x)\ i\ x$ з області визначення функції виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Якщо функція $y = f(x)$ є ***непарною***, то її ***графік симетричний відносно початку координат***.

Якщо функція $y = f(x)$ така, що хоча б для однієї пари значень $(-x)\ i\ x$ виявилося, що $f(-x) \neq \pm f(x)$, то функція називається функцією ***загального виду***.

Отже, якщо

$f(-x) \neq \begin{cases} -f(x), \\ f(x), \end{cases}$ то $f(x)$ - функція загального виду.

Приклади парних функцій:

$y = x^2,\ \ y = x^4,\ \ y = x^6,$

$y = x^4 + x^2 + 1,\ \ y = x^6 - x^2,\ \ y = -x^8 - x^4 + 1,$

$y = \cos x,\ \ y = (\sin x)/x,\ \ y = xtgx.$

Приклади непарних функцій:

$y = x,\ \ y = x^3,\ \ y = x^5,\ \ y = x^7,$

$y = x + x^{19},\ \ y = x^9 - x^3,\ \ y = -x^{13} + x^7,\ \ y = \sin x,\ \ y = tgx\ \ y = ctgx.$

Приклади функцій загального виду:

$y = x^2 + x,\ \ y = (x+2)^4,$

$y = (x+1)^3,\ \ y = x^3 + x^6,\ y = x - x^4.$

Приклад. З'ясувати, чи є функція парною, непарною, загального виду:

а) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 7$; б) $f(x) = \dfrac{tgx}{x}$; в) $f(x) = x + \sin x$;

г) $f(x) = 3x^5 - 8x^3$; д) $f(x) = 5x^3 - 2x^2$; е) $f(x) = (x+3)^5$.

Розв'язання.

а) $f(-x)=2(-x)^4+3(-x)^2+7=2x^4+3x^2+7=f(x)\Rightarrow f(x)$
- парна функція;

б) $f(-x)=\dfrac{tg(-x)}{-x}=\dfrac{-tgx}{-x}=\dfrac{tgx}{x}=f(x)\Rightarrow f(x)$ - парна функція;

в) $f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-(x+\sin x)=-f(x)\Rightarrow f(x)$
- непарна функція;

г) $f(-x)=3(-x)^5-8(-x)^3=3(-x^5)-8(-x^3)=$
$=-3x^5+8x^3=-(3x^5-8x^3)=-f(x)$
$f(-x)=-f(x)\ \Rightarrow f(x)$ - непарна функція;

д) $f(-x)=5(-x)^3-2(-x)^2=-5x^3+2x^2,\ f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq f(-x)\Rightarrow f(x)$ -
функція загального виду;

е) $f(-x)=(-x+3)^5,\ f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq f(-x)\Rightarrow f(x)$
функція загального виду.

Відповідь: а), б) – парні функції; в), г) – непарні функції; д), е) – функції загального виду.

§ 4.4 Періодичність функції

Функція $y=f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке число $T\neq 0$, що при будь-якому x з області визначення функції числа $(x-T)$ і $(x+T)$ також належать цій області і виконується рівність $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$. Число $T\neq 0$ в цьому випадку називається періодом функції $f(x)$.

Усяка періодична на множині дійсних чисел функція має нескінченну множину періодів, тому що якщо T – період функції, то будуть періодами і числа kT $(k\in Z\setminus\{0\})$. На практиці, кажучи про період, нерідко мають на увазі найменший додатній період (якщо такий існує). Найменший додатній період називається основним періодом.

Приклади періодичних функцій:

- $y=\{x\}$ - дробова частина x (Рис. 4.4).

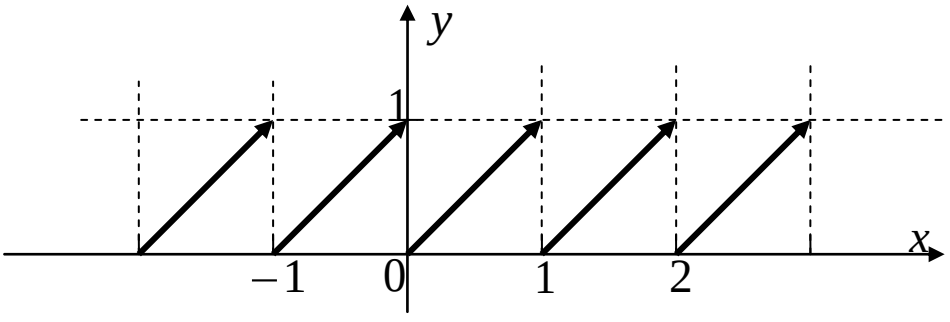


Рис. 4.4

Основний період $T = 1.$

- $y = \sin x.$

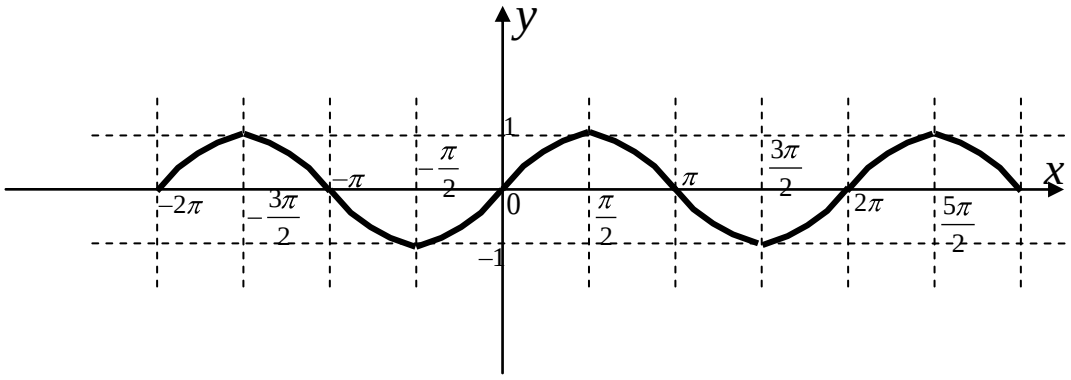


Рис. 4.5

Основний період $T = 2\pi.$

- $y = tgx$, основний період $T = \pi$.

§ 4.5 Обмеженість функції

Функція $y = f(x)$ називається обмеженою, якщо її область значення належить деякому проміжку скінченної довжини. В іншому разі функція називається необмеженою (Рис.4.6) $E(f) \subset [-N; M]$

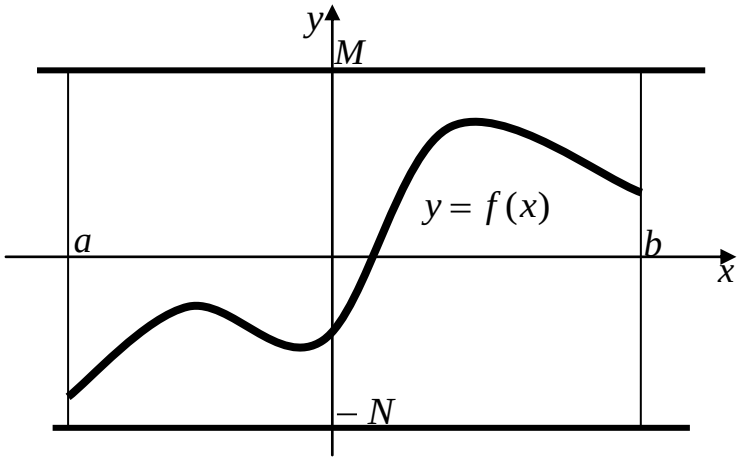


Рис. 4.6

Функція може бути обмеженою зверху, або знизу.

Приклади функцій, обмежених на всій області визначення:

$$y = \frac{1}{x^2+1},\ \ y = \frac{2x}{x^2+1},\ \ y = \frac{x^2+5}{x^4+x^2+1},\ \ y = \sin x,\ \ y = \cos x.$$

Зауваження 1. Можна дати таке визначення обмеженості функції: функція $y = f(x)$ називається обмеженою на всій області значення $D(f)$, якщо існує таке число $C > 0$, що $|f(x)| \le C$ для кожної точки $x \in D(f)$.

Зауваження 2. Функція $y = f(x)$ називається обмеженою на деякій множині $\overline{X} \subset D(f)$, якщо існує таке число $C > 0$, що $|f(x)| \le C$ для кожної точки $x \in \overline{X}$.

Функція, обмежена на деякій множині $\overline{X} \subset D(f)$, може бути не обмеженою на всій області визначення. Наприклад, функція $y = 1/x$ обмежена при $x \in [1/10;10]$, але на всій області визначення вона є необмеженою (Рис.4.7)

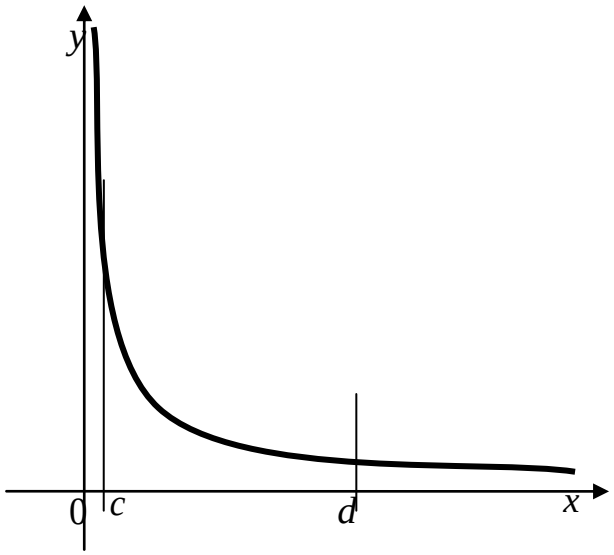


Рис. 4.7

§ 4.6 Монотонність функції

Нехай функція $y = f(x)$ має за ОДЗ деяку множину V і $X \subset V$. Тоді функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою*** на даному числовому проміжку X, якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає більше значення функції $f(x)$, тобто для будь-яких x_1, $x_2 \in X$ з умови $x_2 > x_1$ слідує $f(x_2) > f(x_1)$ (Рис. 4.8 – функція $y = f_1(x)$).

Якщо ж з умови $x_2 > x_1$ може бути $f(x_2) \ge f(x_1)$, то функція називається ***неспадною*** (Рис. 4.8 – функція $y = f_2(x)$).

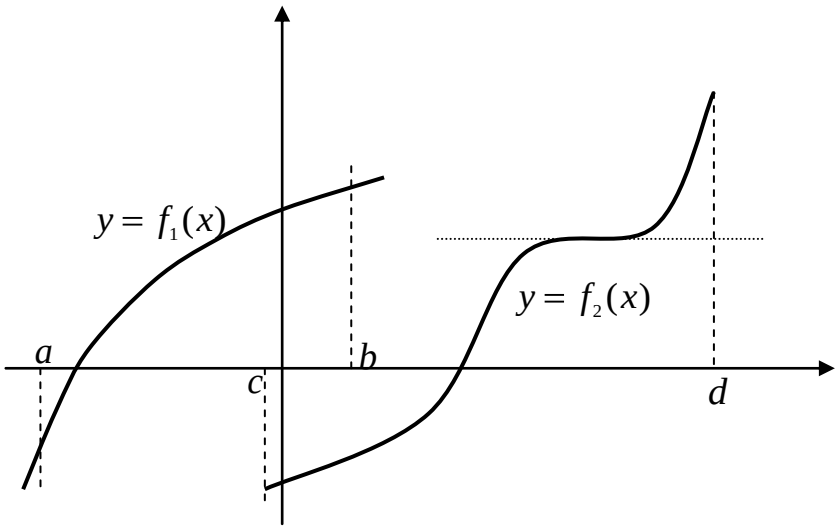


Рис. 4.8

Функція $y = f(x)$ називається спадною на даному числовому проміжку X, якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає менше значення функції $f(x)$, тобто будь-яких $x_1,\ x_2 \in X$ з умови $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Якщо ж з умови $x_2 > x_1$ може бути $f(x_2) \le f(x_1)$, то функція називається ***незростаючою.***

Зростаючі і не спадні, спадні і не зростаючі функції на деякій множині V називаються *монотонними* на даній множині, а зростаючі і спадні – *строго монотонними*.

Приклади монотонних функцій на всій області визначення:

$y = x,\ y = x^3,\ y = x^5,\ y = 2^x,\ \ y = \log_a x,\ \ y = \arcsin x,\ \ y = arctgx$.

Функція може не бути монотонною на всій області визначення, але на деяких підмножинах ОДЗ вона поводиться як монотонна.

Наприклад, функція $y = x^2$ не є монотонною на всій області визначення, однак при $x \in (-\infty;0)$ вона є спадною, а при $x \in (0;+\infty)$ $y = x^2$ є зростаючою. Функція $y = \sin x$ не є монотонною на всій області визначення, однак у середині кожного з інтервалів

$-\frac{\pi}{2}+2\pi k < x < \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ (k \in Z)$ вона є зростаючою, а усередині кожного з інтервалів $\frac{\pi}{2}+2\pi k < x < \frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ (k \in Z)$ - спадною.

§ 4.7 Проміжки знакосталості і корені функції

Числові проміжки, на яких функція зберігає свій знак (тобто залишається додатною чи від'ємною), називаються проміжками знакосталості функції.

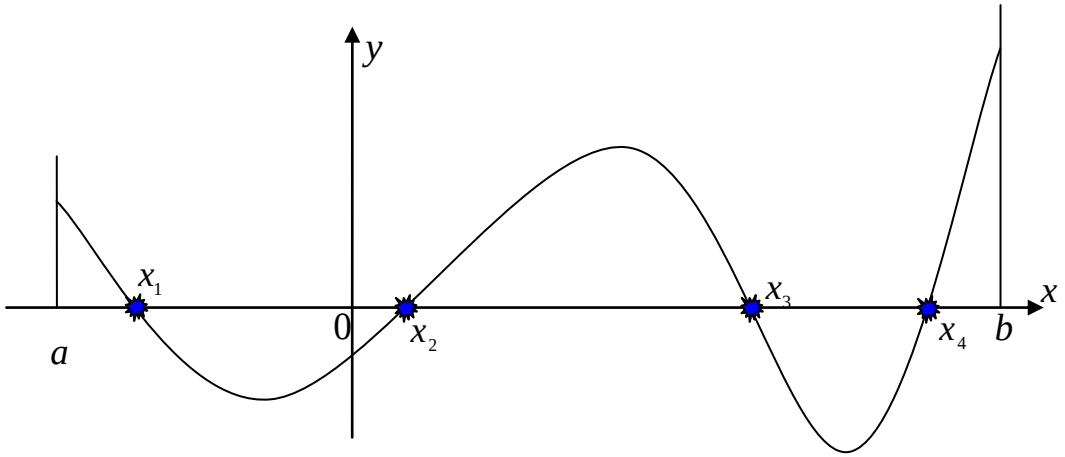


Рис. 4.9

На рис.4.9 функція задана на проміжку $[a; b]$. Проміжками знакосталості будуть проміжки:

- при яких задана функція додатна - $[a; x_1]$; $[x_2; x_3]$; $[x_4; b]$;
- при яких задана функція від'ємна - $[x_1; x_2]$; $[x_3; x_4]$.

Значення аргументу $x \in D(f)$, при яких функція $f(x)=0$, називається ***коренями*** (або нулями) функції. Ясно, що значення аргументу, при яких функція перетворюється на нуль, - це абсциси точок перетину графіка функції з віссю $0x$. На рис.4.9 бачимо, що на проміжку задання функції остання має чотири корені - x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4. Для того, щоб знайти корені функції необхідно розв'язати рівняння $f(x)=0$. Наприклад, для функції $y=x+2$ нулем функції є $x+2=0 \Rightarrow x=-2$; для функції $y=x^2-5x+6$ нулями функції є $x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2,\ x_2=3$.

§ 4.8 Точки мінімуму і точки максимуму функції. Екстремум функції

В даному параграфі основними понятійними термінами є:

- мінімум функції і найменше значення функції;
- максимум функції і найбільше значення функції.

Точка x_0 з області визначення функції $y = f(x)$ називається точкою ***мінімуму*** цієї функції, якщо існує такий $\delta - окіл$ точка x_0, що для усіх $x \neq x_0$ з цього околу, тобто $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (Рис.4.10).

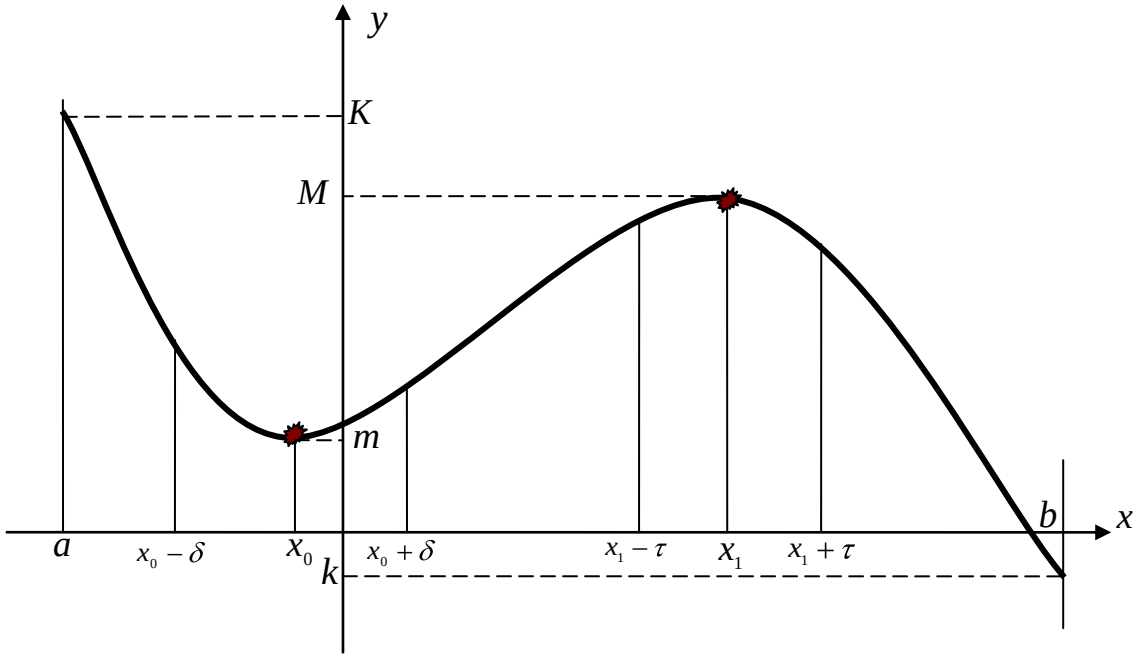


Рис. 4.10

Записується це так: $m = \min\limits_{x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)} f(x)$. В той же час на проміжку $[a; b]$ існують точки в яких значення функції буде менше ніж m. ***Найменше*** значення k буде в точці $x = b$.

Точка x_1 з області визначення функції $y = f(x)$ називається точкою ***максимуму*** цієї функції, якщо існує такий $\tau - окіл$ точки x_1, що для усіх $x \neq x_1$ з цього околу, тобто $x \in (x_1 - \tau,\ x_1 + \tau)$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x)$. Записується це так: $M = \max\limits_{x \in (x_1 - \tau,\ x_1 + \tau)} f(x)$. ***Найбільше*** значення функції на проміжку $[a; b]$ буде значення K функції в точці $x = a$ (Рис.4.10).

Точка мінімуму і точка максимуму називається точками екстремуму даної функції, а значення функції в цих точках називається екстремумом функції (відповідно мінімумом і максимумом).

§ 4.9 Обернена функція

Кожному значенню $x \in D(f)$ з області визначення функції рівність $y = f(x)$ ставить у відповідність єдине значення $y \in E(f)$. При такій відповідності можливі два якісно різні випадки:

- різним значення аргумента ставиться і відповідність різні значення функції;
- деяким різним значення аргумента ставиться і відповідність одне і теж значення функції;

Будемо розглядати функції, для яких на ОДЗ буде виконуватись перший випадок: різним значення аргумента ставиться і відповідність різні значення функції. Тоді кожному значенню $y \in E(f)$ відповідає єдине значення $x \in D(f)$. Отже, можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ для якої множини D і E будуть відповідно областю значень і областю визначення. Така функція називається ***оберненою*** до даної.

Приклад 1. Рівність $y = 3x - 1$ кожному значенню y ставить у відповідність деяке єдине значення x: $x = (y+1)/3$ (розв'язуємо $y = 3x - 1$ відносно x). Можна сказати, що рівність $y = 3x - 1$ визначає x як деяку функцію змінної y, тобто $x = (y+1)/3$.

Графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ ***і*** $x = \varphi(y)$ ***збігаються.***

У співвідношенні $x = \varphi(y)$ роль аргументу грає y, а роль функції – x. Оскільки, за звичай, x позначається аргумент, а y позначають функцію, то перепишемо залежність $x = \varphi(y)$ у вигляді $y = \varphi(x)$**.** Функція $y = \varphi(x)$ називається оберненою до функції $y = f(x)$.

Якщо точка $(x; y)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(y; x)$ належить графіку оберненої функції $y = \varphi(x)$. ***Тому графіки прямої і оберненої функції симетричні відносно прямої*** $y = x$ ***(бісектриси 1-го та 3-го координатних кутів).***

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y) \rightarrow \textit{графіки збігаються}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y) \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} y \to x \\ x \to y \end{matrix} \right\rangle \; y = \varphi(x) \rightarrow \textit{графіки симетричні відносно прямої } y = x$$

Так, наприклад, $y=3x-1 \Leftrightarrow x=(y+1)/3$. Тому функція $y=(x+1)/3$ є оберненою до функції $y=3x-1$.

Для того щоб у функції $y=f(x)$ ***при*** $x \in [a;b]$ ***існувала обернена до неї функція, необхідно і достатньо, щоб функція*** $y=f(x)$ ***була монотонною при*** $x \in [a;b]$ ***(тобто або тільки зростаючою, або тільки спадною).***

Так, для функції $y=x^3$ оберненою є $y=\sqrt[3]{x}$, $x \in (-\infty;+\infty)$.

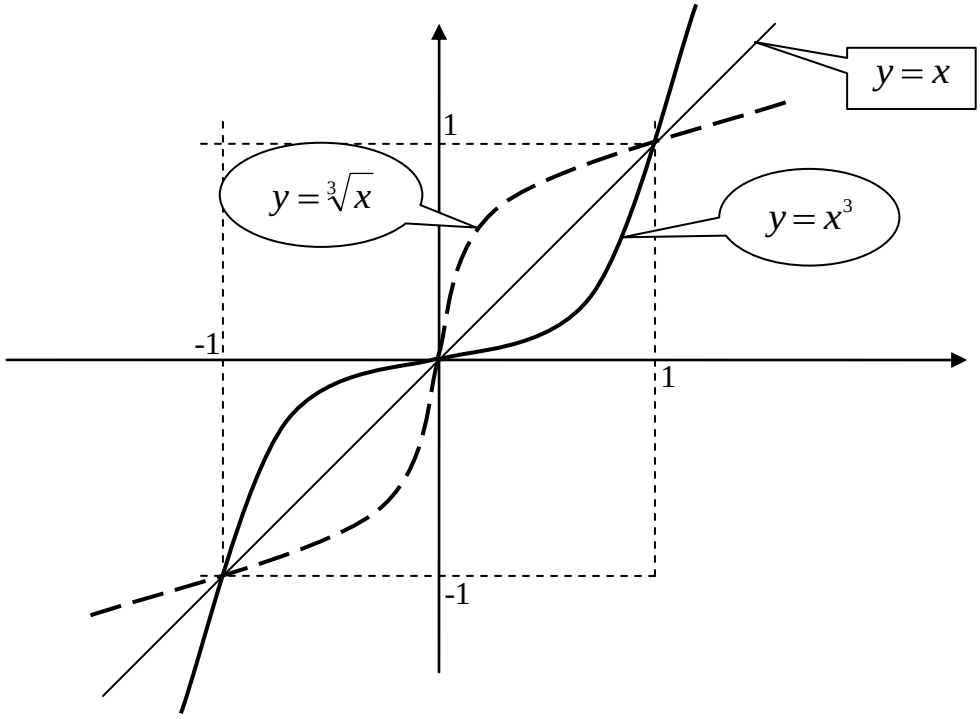


Рис.4.11

Для функції $y=x^2$ при $x \in (-\infty;+\infty)$ оберненої не існує, оскільки двом значенням аргументу $(-x)$ *і* x відповідає одне значення функції. Однак при $x \in (0;+\infty)$ оберненою для функції $y=x^2$ є функція $y=\sqrt{x}$. При $x \in (-\infty;0)$ оберненою для $y=x^2$ є $y=-\sqrt{x}$ при ОДЗ $x \in [0;+\infty)$.

Так, наприклад, графік функції $y=x^3$ симетричний графіку функцій $y=\sqrt[3]{x}$ відносно прямої $y=x$. Узагалі для функції $y=x^n$ $(x \geq 0,\ n \in N,\ n \geq 2)$ оберненою є $y=\sqrt[n]{x}$.

§ 4.10 Основні елементарні функції

До основних елементарних функцій відносяться такі функції:

1. Степенева функція: $y=x^{\alpha}, \alpha \in R$. ОДЗ таких функцій залежить від значення α.

2. Показникова функція: $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.

3. Логарифмічна функція: $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$.

4. Тригонометричні функції: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx,$ $y = \sec x,\ y = \cos ecx$.

5. Обернені тригонометричні функції:

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx.$$

З основних елементарних функцій можна утворити інші функції за допомогою арифметичних дій (додавання, віднімання, множення і ділення) і операцій узяття функції від функції.

Елементарними функціями називаються функції, утворені від основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних дій і скінченного числа операцій узяття функції від функції.

Приклади елементарних функцій: $y = x^2 + \sqrt{x},\ y = \dfrac{10^x - 3}{5x^2}$,

$y = \log_2(x + \sqrt{1 + x^2}),\ y = arctg\sqrt{x^2 - 1},\ \mathrm{y} = \sin\sqrt{\mathrm{x}}$.

Елементарні функції діляться на два класи: алгебраїчні та трансцендентні функції.

Функція називається **алгебраїчною**, якщо її значення можна одержати, виконуючи над незалежною змінною скінченне число алгебраїчних дій: додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня з раціональним показником.

Функція, що не є алгебраїчною, називається трансцендентною. Відомо, що усі прямі і обернені тригонометричні функції, також показникові і логарифмічна функції є трансцендентними функціями.

Приклад алгебраїчної функції:

$$y = 3x^2 - 5x + 2,\ y = \frac{2x - 3}{1 - x},\ y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + \sqrt[3]{x} + 2}.$$

Приклад трансцендентних функцій: $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = e^x,$

$$y = \lg x,\ y = \log_2 x,\ y = x \cdot 2^x,\ y = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1},\ y = x^2 + tgx$$

Алгебраїчні функції в свою чергу поділяються на раціональні та ірраціональні.

Алгебраїчні функції називаються раціональними, якщо серед дій, які виконуються над незалежною змінною, відсутнє добування коренів.

Алгебраїчна функція, що не є раціональною, називається ірраціональною.

Приклад раціональних функцій: $y = 3x^3 - x + 5,\ y = 7,\ y = 2 \cdot x^2$,

$y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1},\ y = \dfrac{x^2 + e}{x - 2},\ y = \dfrac{x - \pi}{x^2 + 5},\ y = x^5 + \dfrac{3x}{x^2 + 1}$.

Приклад ірраціональних функцій:

$y=\sqrt{x-1},\ y=\sqrt[3]{x^2+7},\ y=\sqrt[4]{3x^2+x+1},\ y=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+1},\ y=\dfrac{\sqrt[5]{x}+\pi}{x^3+7}.$

Найбільш простими раціональними функціями є цілі раціональні функції (многочлени).

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ - многочлен степеня n $(a_0\neq 0)$.

Приклад цілих раціональних функцій: $y=2,\ y=2x+5,\ y=3x^3-5x+6,$

$y=\dfrac{1}{5}(x-1)^2+3x,\ y=3(x+2)^5-2x+16.$

Якщо раціональна функція R(x) записується у вигляді відношення двох многочленів, то вона називається дробово–раціональною функцією, $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - дробово–раціональна функція ($P(x),\ Q(x)$ - многочлени).

Приклад дробово–раціональної функції: $y=\dfrac{1}{x},\ y=\dfrac{3}{2x+5},\ y=\dfrac{x}{3x+1},$

$y=\dfrac{2x+5}{x^2+x+3},\ y=\dfrac{x^5-3x^2+6}{x^3+8},\ y=\dfrac{x^7+1}{x^3-3x+2}.$

4.11 Лінійна функція і її графік

Функція, задана формулою $y=kx+b$, де k і b – деякі фіксовані числа, називається лінійною.

Область визначення лінійної функції $y=kx+b$ є множина усіх дійсних чисел $R=(-\infty;\infty)$.

Графіком лінійної функції $y=kx+b$ є пряма лінія. Для побудови графіка $y=kx+b$ достатньо знати координати двох точок цього графіка. Узявши $x=0\Rightarrow y=b\Rightarrow A(0;b)$ отримаємо точку перетину графіка з віссю $0y$. Узявши $y=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{k}\ (k\neq 0)\Rightarrow B(-\dfrac{b}{k};0)$ отримаємо точку перетину графіка з віссю $0x$. Таким чином, точками перетину графіка функції $y=kx+b$ з осями координат будуть $B(-\dfrac{b}{k};0),\ A(0;b)$, якщо $k\neq 0$ (Рис.4.12).

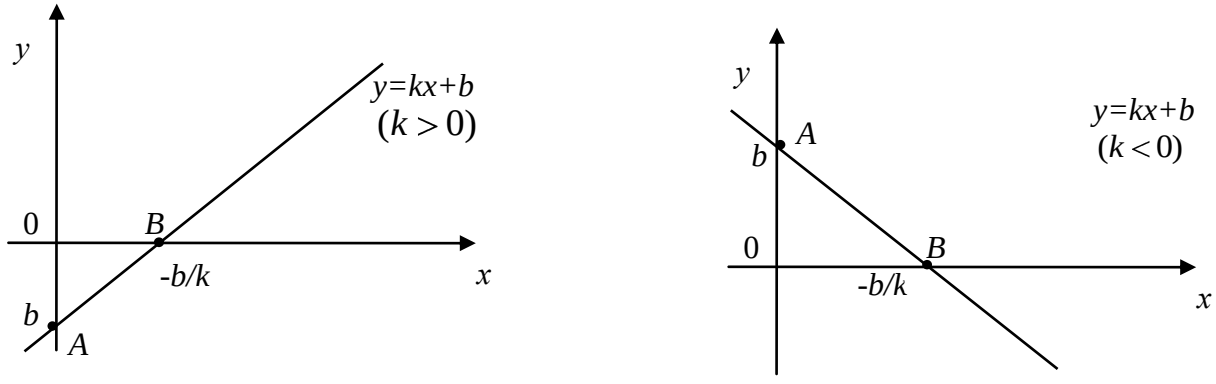


Рис.4.12

Функція виду $y = kx\,(k \neq 0)$ називається ***прямою пропорційністю***, де k – коефіцієнт пропорційності. Графіком функції $y = kx$ є пряма, яка проходить через початок координат. Графіки функцій $y = kx$ при $k = +1/2,\ k = -1/2,\ k = -2,\ k = +2$ зображено на рис.4.13.

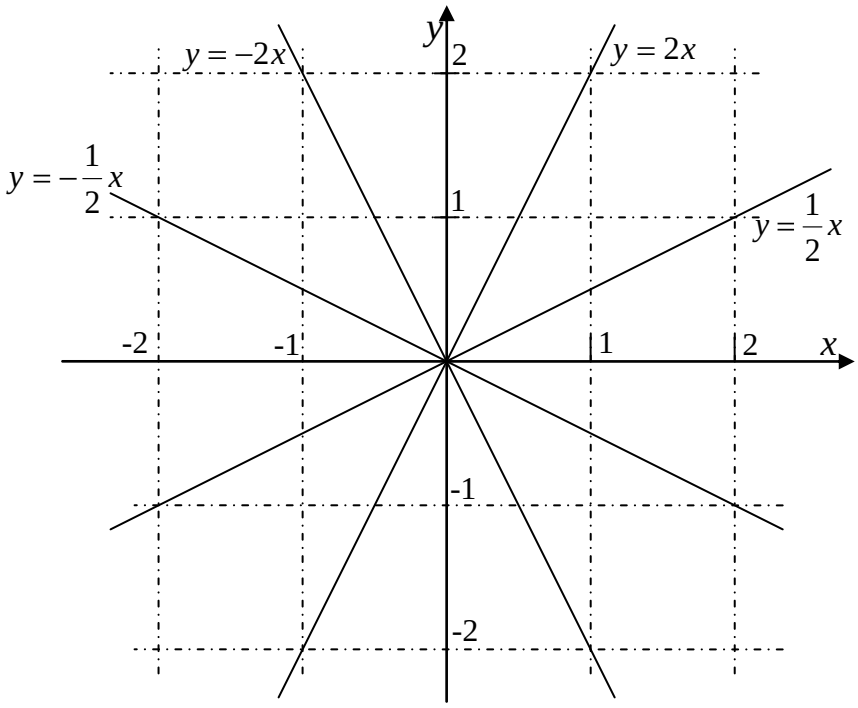


Рис.4.13

При $k = 0$ дістаємо пряму $y = b$, яка паралельна осі $0x$ (Рис.4.14). Вона збігається з віссю $0x$, якщо $b = 0$.

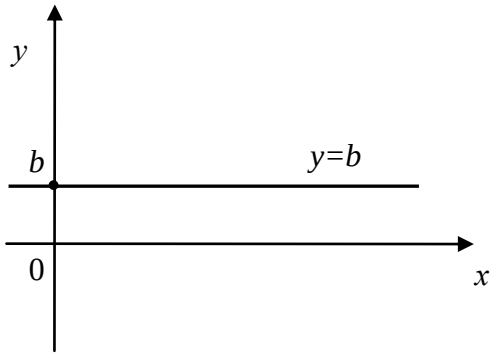


Рис.4.14

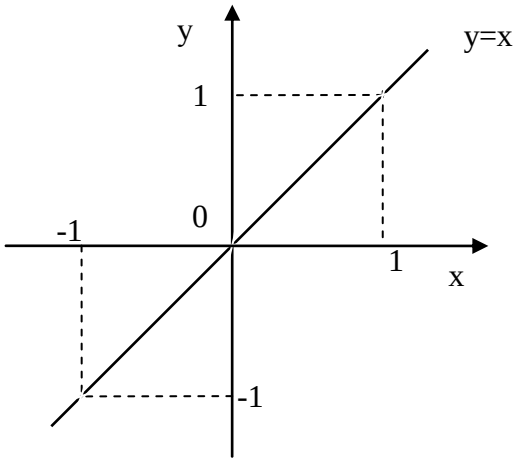
Розглянемо функції $y = x$ і $y = -x$, отримані з $y = kx + b$, коли $b = 0$, $k = \pm 1$.

Функція $y = x$

Складемо таблицю, узявши кілька значень x і знайдемо відповідні значення y.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
У	-3	-2	-1	0	1	2	3

Графіком функцій $y = x$ є пряма лінія, яка проходить через початок координат. Її називають бісектрисою 1-го та 3-го координатних кутів.



Властивості функції $y = x$:

а) $D(f) = R$;

б) $E(f) = R$;

в) нулі функції: y = 0 при x = 0 (функція $y = x$ має тільки один нуль в початку координат);

г) функція набуває від'ємного значення при $x \in (-\infty;0)$; функція набуває додатних значень при $x \in (0;+\infty)$;

д) функція зростає на всій області визначення;

е) функція не має екстремумів;

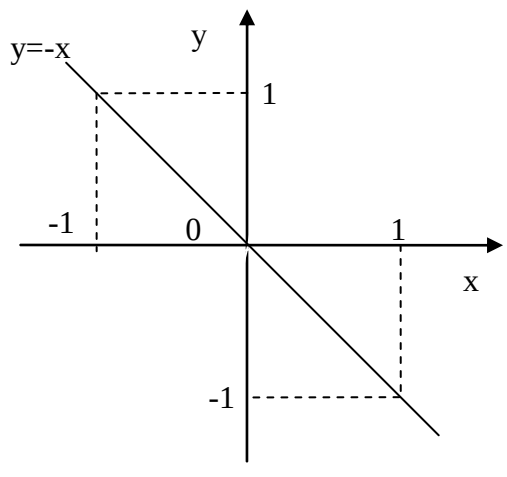
ж) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функція $y = x$ непарна, її графік симетричний відносно початку координат.

Функція $y = -x$

Складемо таблицю:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
У	3	2	1	0	-1	-2	-3

Графіком функцій $y = -x$ є пряма лінія, яка проходить через початок координат. Її називають бісектрисою 2-го та 4-го координатних кутів.



Властивості функції $y = -x$:

а) $D(f) = R$;

б) $E(f) = R$;

в) нулі функції: $y = 0$ при $x = 0$ (функція $y = -x$ має тільки один нуль в початку координат);

г) функція набуває від'ємного значення при $x \in (0;+\infty)$; функція набуває додатних значень при $x \in (-\infty;0)$;

д) функція спадає на всій області визначення;

е) функція не має екстремумів;

ж) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функція $y = -x$ непарна, її графік симетричний відносно початку координат.

4.12 Функція $y = \frac{k}{x}$ і її графік

Функція виду $y = \frac{k}{x}$ $k \neq 0$ називається ***оберненою пропорційністю***; k називають коефіцієнтом оберненої пропорційності. Областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є множина $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty) = R / \{0\}$.

Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ є гіпербола. Якщо $k>0$, то гілки гіперболи розташовані в I і III координатних кутах $(k_1 ; k_2)$; якщо $k<0$, то гілки гіперболи розташовані в I і IV координатних кутах $(\tilde{k}_1 ; \tilde{k}_2)$ (Рис.4.15).

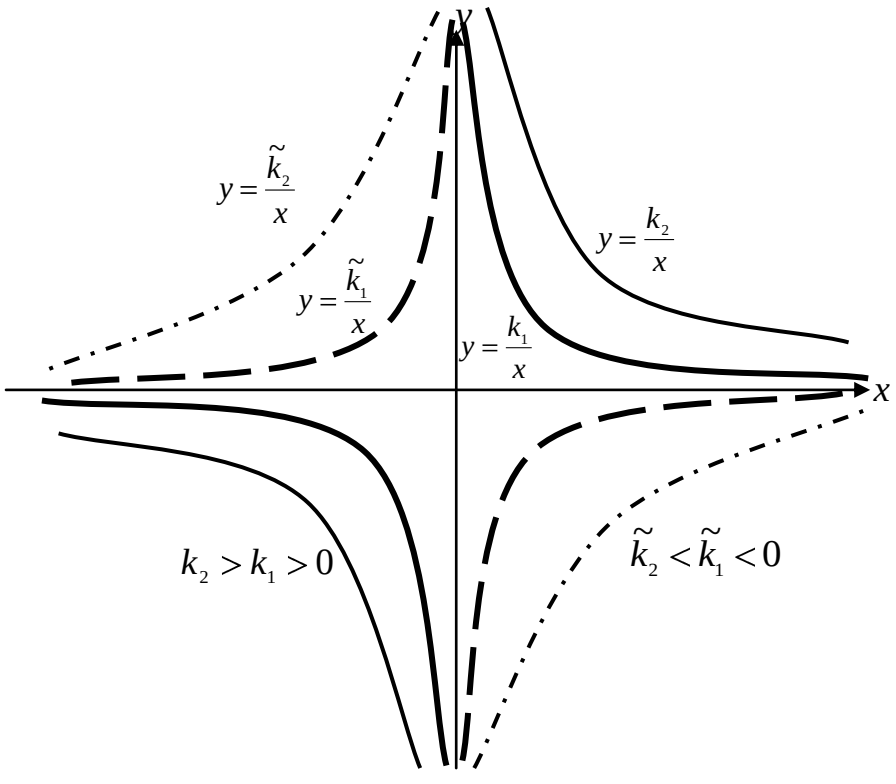


Рис.4.15

Розглянемо більш ретельно функцію $y=\frac{k}{x}$ при *k=1* ($y=\frac{1}{x}$).

Функція $y=\frac{1}{x}$

Складемо таблицю, з огляду на те, що при x=0 функція не визначена.

X	-3	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	3
У	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Будуємо графік функції $y=\frac{1}{x}$. Це гіпербола.

Властивості функції $y=\frac{1}{x}$:

а) $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)=R/\{0\}$;

б) $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)=R/\{0\}$;

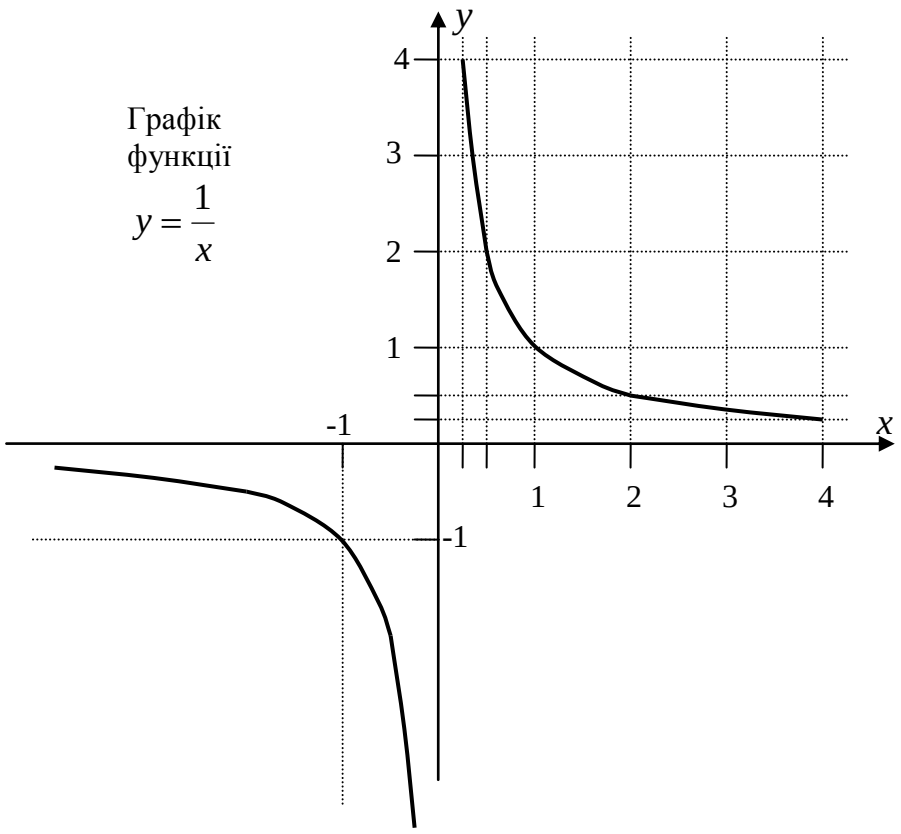


Рис.4.16

в) функція $y=\frac{1}{x}$ не має нулів, тому що рівняння $\frac{1}{x}=0$ не має коренів, графік функції $y=\frac{1}{x}$ не перетинає вісь $0x$;

г) функція набуває від'ємного значення при $x \in (-\infty;0)$; функція набуває додатних значень при $x \in (0;+\infty)$;

д) функція $y=\frac{1}{x}$ спадає при $x \in (-\infty;0)$, а також при $x \in (0;+\infty)$;

е) функція не має екстремумів;

ж) $f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ функція $y=\frac{1}{x}$ непарна, її графік симетричний відносно початку координат;

з) графік функції $y=\frac{1}{x}$ не перетинає вісь $0y$, але при наближенні x до нуля гілки гіперболи необмежено наближаються до осі $0y$. При необмеженому збільшенні x гілки гіперболи необмежено наближаються до осі Ox, ніде її не перетинаючи. Говорять, що осі $0x$ і $0y$ – асимптоти гіперболи $y=\frac{1}{x}$**,** вісь $0y$ – вертикальна асимптота графіка функції $y=\frac{1}{x}$, вісь $0x$ – горизонтальна асимптота графіка функції $y=\frac{1}{x}$.

4.13 Квадратична функція і її графік

Функція, задана формулою $y=ax^2+bx+c$, де a, b, c – задані числа $(a \neq 0)$, називається квадратичною. Область визначення квадратичної функції $D(f)=R$. Графіком функції $y=ax^2+bx+c$ є ***парабола.***

Якщо $a>0$, то гілки параболи направлені вгору;

якщо $a<0$, то гілки параболи направлені вниз.

Для побудови графіка функції $y=ax^2+bx+c$ її приводять до виду $y=a(x+m)^2+p$ шляхом виділення повного квадрата. Повний квадрат виділяється в такий спосіб:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2x\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right).$$

Таким чином,

$y = ax^2 + bx + c = a(x+m)^2 + p$, де $m = \frac{b}{2a}$, $p = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Точки з координатами $(-m; p) = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ є вершиною параболи.

Пряма $x = -\frac{b}{2a}$ є віссю симетрії.

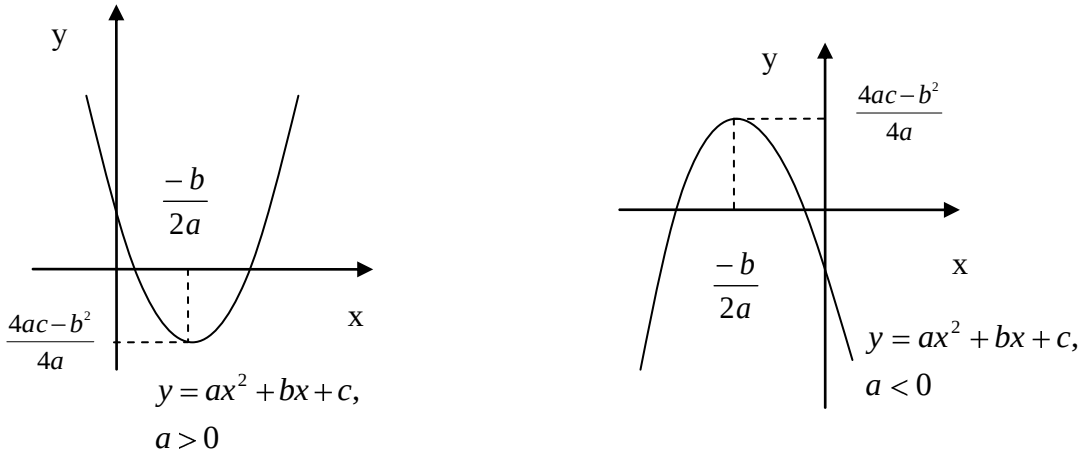


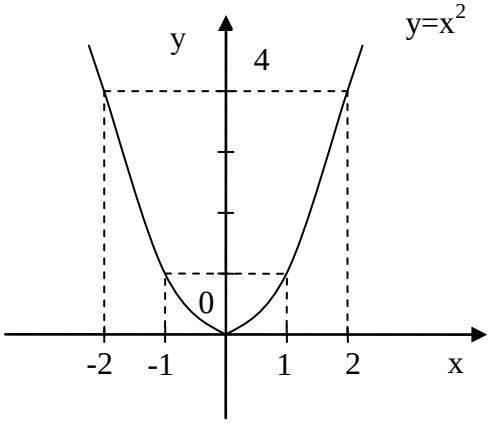
Рис.4.17

Розглянемо більш докладно параболу $y = x^2$.

Функція $y = x^2$

Складемо таблицю деяких значень функції:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
У	9	4	1	0	1	4	9



Графіком функції $y = x^2$ є парабола, вершина якої збігається з початком координат, а гілки параболи направлені вгору (Рис.4.18).

Властивості функції $y = x^2$:

а) $D(f) = R$;

б) $E(f) = [0; +\infty)$;

в) функція має один нуль: y = 0 при x = 0;

г) функція набуває додатного значення при $x \in R \setminus \{0\} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$;

д) функція зростає при $x \in (0;+\infty)$, функція спадає при $x \in (-\infty;0)$;

е) функція має мінімуми при $x = 0$ $(\min\ y = y(0) = 0)$;

ж) $y(-x) = y(x) \Rightarrow$ функція $y = x^2$ парна, її графік симетричний відносно осі $0y$.

4.14 Функція $y = x^3$ і її графік

Складемо таблицю деяких значень функції:

X	-2	-1	0	1	2
У	-8	-1	0	1	8

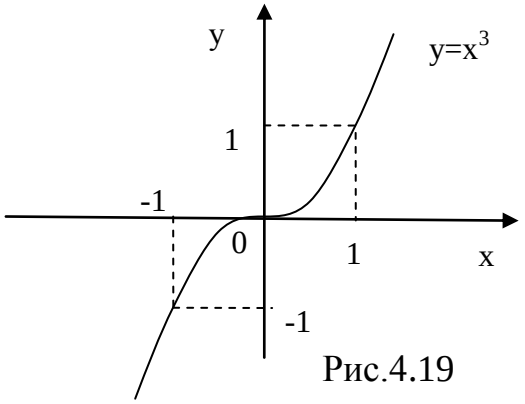


Рис.4.19

Графіком функції $y = x^3$ є кубічна парабола.

Властивості функції $y = x^3$:

а) $D(f) = R$;

б) $E(f) = R$;

в) функція має один нуль: у = 0 при х = 0;

г) функція набуває від'ємного значення при $x \in (-\infty;0)$; функція набуває додатних значень при $x \in (0;+\infty)$;

д) функція зростає на всій області визначення;

е) функція не має екстремумів;

ж) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функція $y = x^3$ непарна, її графік симетричний відносно початку координат.

У більш загальному вигляді можна розглянути степеневу функцію з натуральним показником.

4.15 Степенева функція з натуральним показником $y = x^n,\ n \in N$

Розглянемо функцію $y = x^n,\ n \in N$, $x \in R$. При *n=1* дістанемо у = х – лінійну функцію вивчену раніше. Нехай тепер $n > 1$.

Якщо *n* – парне натуральне число ($n = 2k,\ k \in N$), то властивості функції $y = x^{2k}$ (Рис.4.20) такі ж , як і функції $y = x^2$.

Якщо n – непарне натуральне число, більше або дорівнює 3 ($n = 2k+1,\ k \in N$), то властивості функції $y = x^{2k+1}$ (Рис.4.21) такі ж , як і функції $y = x^3$.

Наведемо загальний вигляд графіків функції $y = x^{2k}$ (Рис.4.20) і $y = x^{2k+1}$ (Рис.4.21).

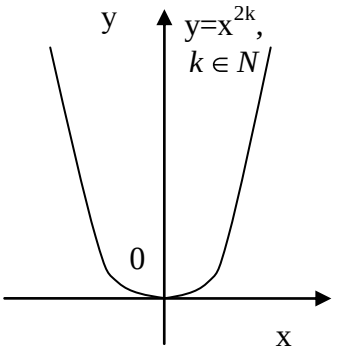


Рис.4.20

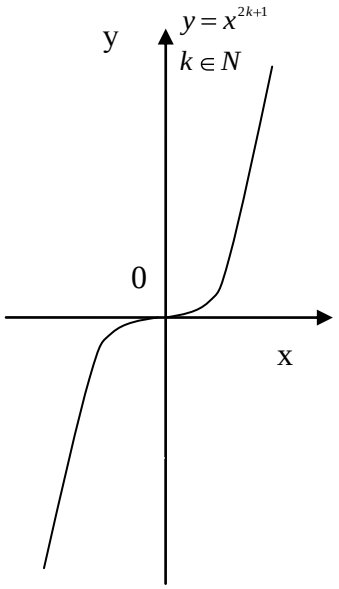
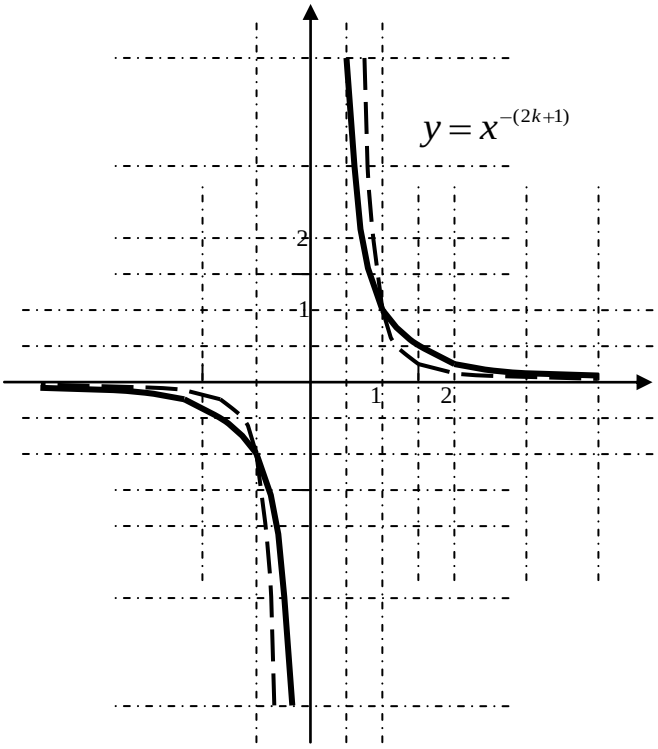


Рис.4.21

4.16 Степенева функція з цілим від'ємним показником ($y = x^{-n},\ n \in N$)

Розглянемо функцію $y = x^{-n},\ n \in N$. При $n = 1$ дістанемо $y = x^{-1} = 1/x$ - гіпербола розглянута раніше.



Нехай n – непарне число, більше одиниці n = 3, 5, 7, …

У цьому випадку функція $y = x^{-n}$ має в основі ті ж властивості, що і функція $y = 1/x$. Графік функції $y = x^{-n}$ ($n = 2k+1,\ k \in N$) нагадує графік функції

$y = 1/x$ При $x > 0$ всі графіки проходять через точку (1;1) (Рис. 4.22).

Рис. 4.22

Нехай n – парне число ($n = 2k,\ k \in N$). Перелічимо деякі властивості функції $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$:

а) $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty) = R / \{0\}$;

б) $E(f) = (0;+\infty)$;

в) $y(-x) = y(x) \Rightarrow$ функція $y = \frac{1}{x^2}$ парна;

г) $y = \frac{1}{x^2}$ спадає при $x \in (0;+\infty)$ і зростає при $x \in (-\infty;0)$.

Такі ж властивості мають будь – які функції виду $y = x^{-n}$ при парному n, більшому двох. Графік функції $y = x^{-n}$ (загальний вигляд графіка функції $y = x^{-n}$ при парному додатному n) зображено на Рис.4.23.

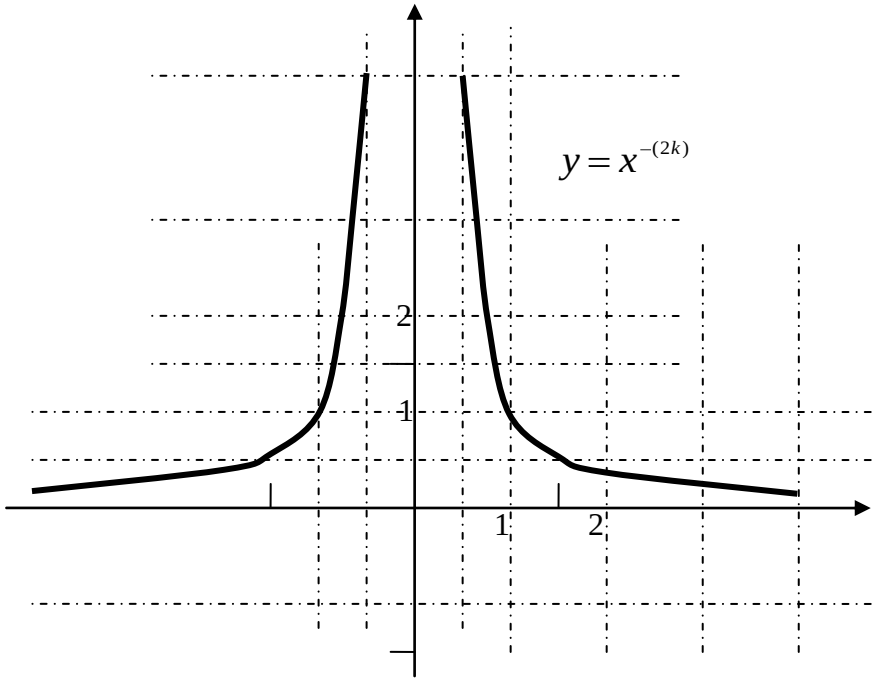


Рис.4.23

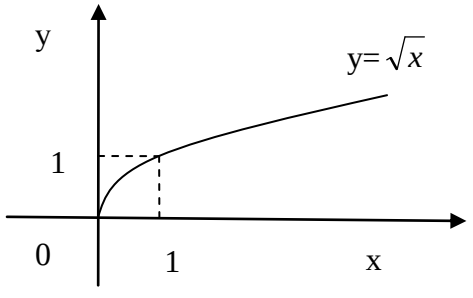
4.17 Функція $y = \sqrt{x}$ і її графік

Складемо таблицю деяких значень, з огляду на те, що функція визначена при $x \geq 0$:

X	0	1	4	9	16
У	0	1	2	3	4

Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$:

Властивості функції $y = \sqrt{x}$:



а) $D(f) = [0;+\infty)$;

б) $E(f) = [0;+\infty)$;

Рис.4.24

в) функція $y = \sqrt{x}$ має один нуль: y = 0 при x = 0;

г) функція набуває додатного значення при $x \in (0;+\infty)$;

д) функція зростає при $x \in [0;+\infty)$;

е) функція має мінімуми при $x = 0$ $(\min\ y = y(0) = 0)$;

ж) функція $y = \sqrt{x}$ ні парна, ні непарна, тобто $y = \sqrt{x}$ є функцією загального виду (Рис.4.24).

4.18 Функція $y = \sqrt[3]{x}$ і її графік

Складемо таблицю:

X	-8	-1	0	1	8
У	-2	-1	0	1	2

Побудуємо графік функцій $y = \sqrt[3]{x}$:

а) $D(f) = (-\infty;+\infty)$;

б) $E(f) = (-\infty;+\infty)$;

в) функція має один нуль: y = 0 при x = 0;

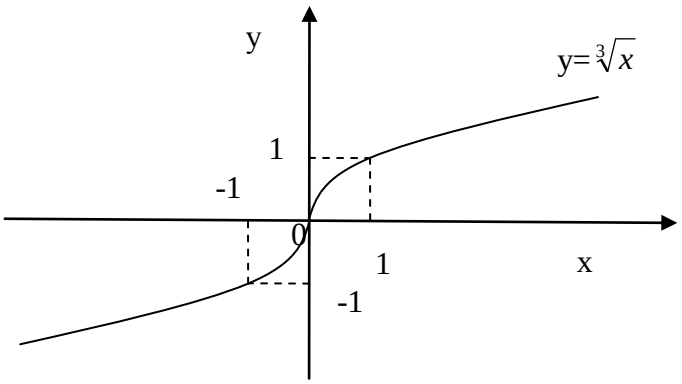


Рис.4.25

г) функція набуває додатного значення при $x \in (0;+\infty)$, функція набуває від'ємних значень при $x \in (-\infty;0)$;

д) функція зростає при $x \in (-\infty;+\infty)$, тобто на всій області визначення;

е) функція не має екстремумів;

ж) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функція $y = \sqrt[3]{x}$ непарна, її графік симетричний відносно початку координат (Рис. 4.25).

4.19 Функція $y = \sqrt[n]{x}$ і її графік

При парному *n* функція $y=\sqrt[n]{x}$ має ті ж властивості, що і функція $y=\sqrt{x}$, і графік її (Рис.4.26) нагадує графік функції $y=\sqrt{x}$.

При непарному *n* функція $y=\sqrt[n]{x}$ має ті ж властивості, що і функція $y=\sqrt[3]{x}$, і графік її (Рис.4.27) нагадує графік функції $y=\sqrt[3]{x}$.

На поданих рисунках зображено графіки функцій $y=\sqrt[n]{x}$ при *n* парному (Рис.4.26) і при *n* непарному (Рис.4.27).

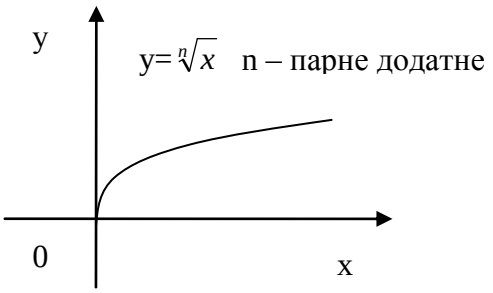


Рис.4.26

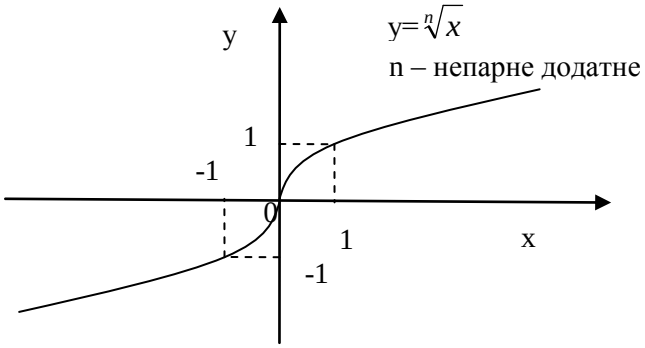


Рис.4.27

4.20 Функція $y=|x|$ і її графік

Позначення $|x|$ читається як ***модуль*** *x* ***(абсолютна величина*** *x****)***. Ця функція визначається так:

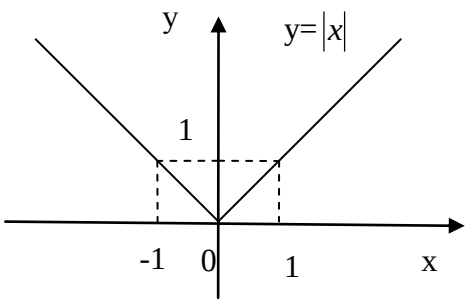


Рис. 4.28

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Графік функції $y=|x|$ зображено на Рис. 4.28.

Функція $y=|x|$ визначена при $x\in R$, набуває тільки невід'ємних значень. Таким чином, D(f) = $(-\infty;+\infty)$; E(f) = $[0;+\infty)$; функція $y=|x|$ перетворюється на нуль при x = 0. При $x\in(-\infty;0)$ функція спадає, при $x\in(0;+\infty)$ функція $y=|x|$ зростає. Оскільки $y(-x)=|-x|=|x|=y(x)$, то функція $y=|x|$ парна.

Зауваження. У загальному випадку можна розглядати модуль функції:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

4.21 Геометричне перетворення графіків функції

Правила та методи геометричних перетворень корисні тим, що за допомогою них можна побудувати графік більш складної функції, використовуючи графік базової, класичної функції, якщо аналітичний вираз більш складної функції можна виразити як суперпозицію базової функції. Нехай відомий графік функції $y = f(x)$. Розглянемо перетворення, та їх наслідки при побудові графіків більш складних функцій:

1. $y = f(x) + m$

Графік функції дістанемо паралельним перенесенням графіка $y = f(x)$ у додатному ***напрямі осі Oy*** на m одиниць при $m > 0$ і у від'ємному напрямку на n при $n > 0$. (Рис.4.29)

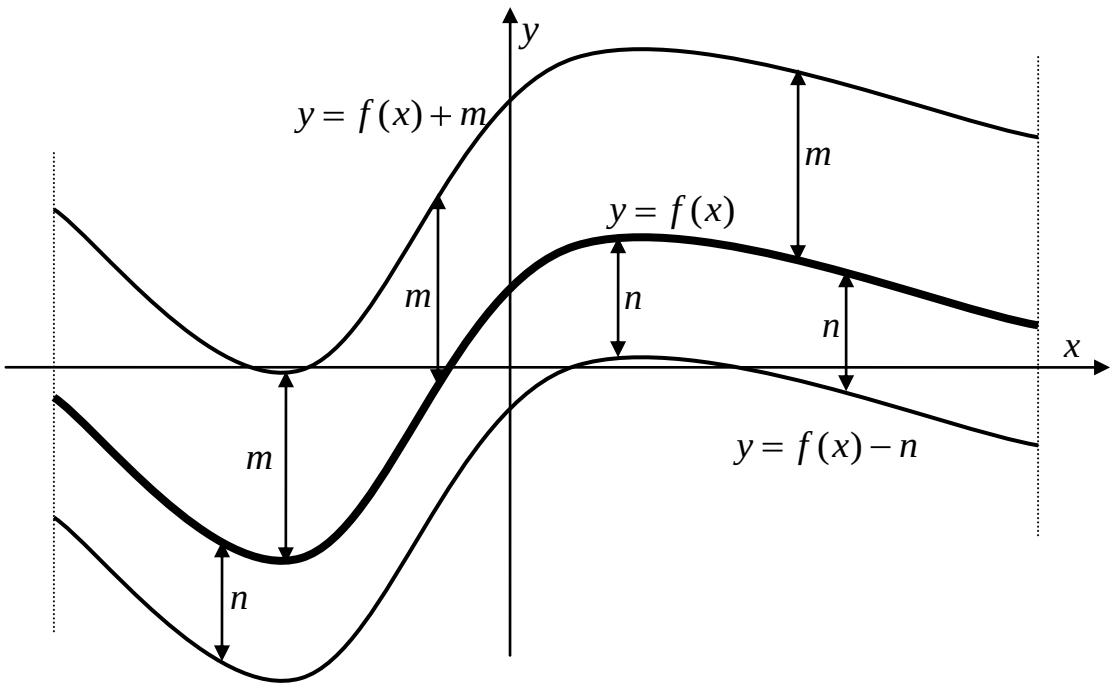


Рис.4.29

2. $y = f(x+b)$

Графік функції дістаємо паралельним перенесенням графіка $y = f(x)$ у ***напрямі осі Ох***:

- від'ємному на b_2 при $b_2 > 0$
- додатному напрямі на b_1 при $b_1 < 0$. (Рис.4.30)

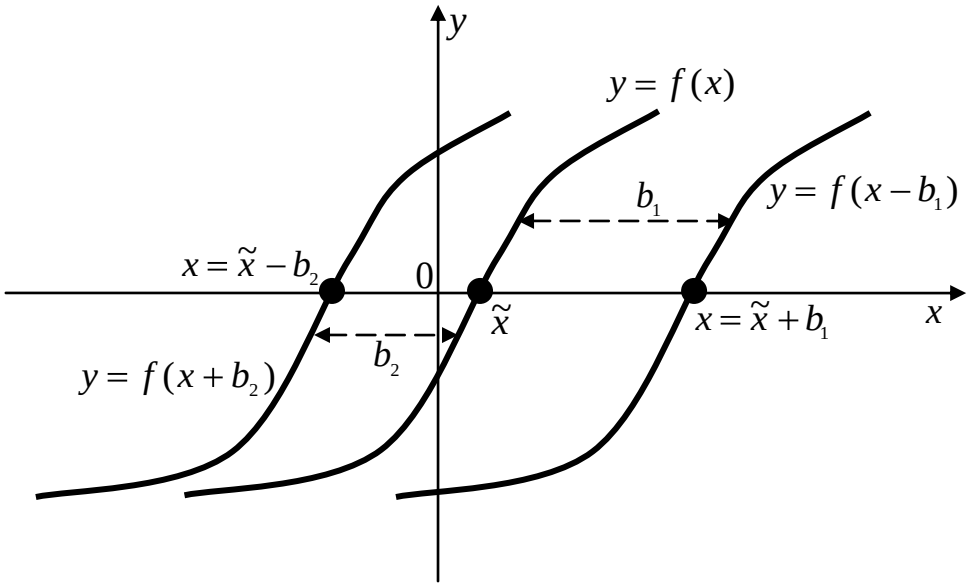


Рис. 4.30

3. $y = -f(x)$

Графік функції $y = -f(x)$ дістаємо симетричним відображенням графіка $y = f(x)$ відносно осі Ох. (Рис. 4.31)

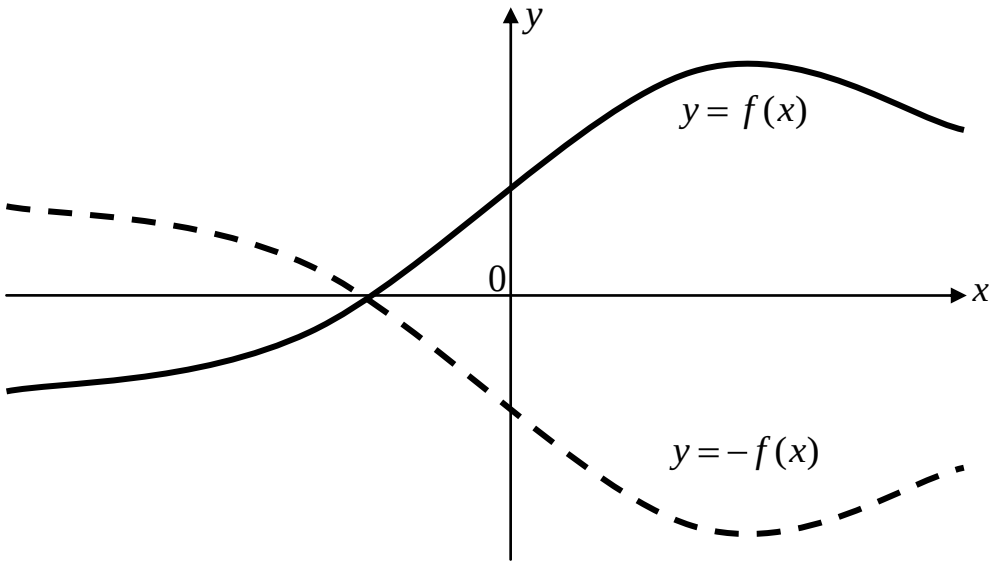


Рис. 4.31

4. $y = |f(x)|$

Графік функції $y = |f(x)|$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ за схемою:

- на проміжках $[a; x_1]$, $[x_2; b]$ де функція додатна ($f(x) \geq 0$) ***графік не змінюємо***;
- на проміжках $(x_1; x_2)$ де функція від'ємна ($f(x) < 0$) графік ***необхідно дзеркально відобразити*** відносно осі $0x$.(Рис. 4.32)

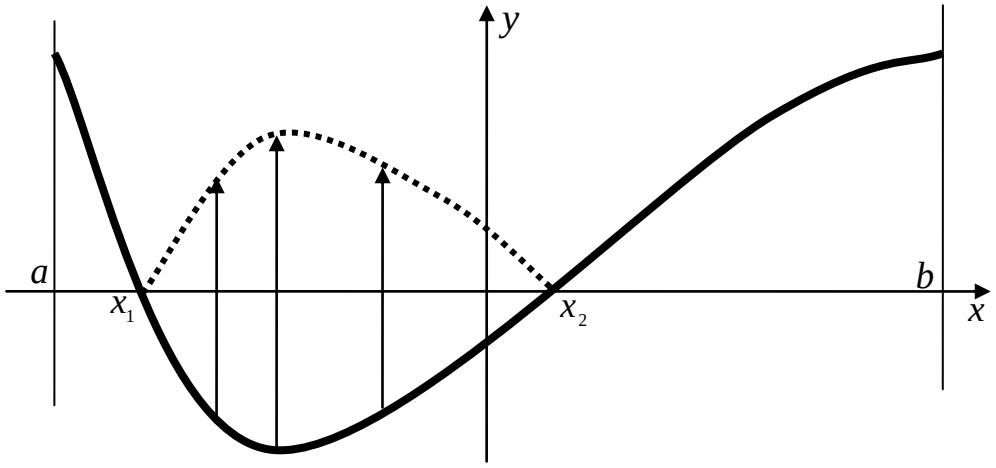


Рис. 4.32

5. $y = f(|x|)$

Графік функції дістаємо з графіка функції $y = f(x)$ у такий спосіб:

- при $x \geq 0$ графік функції $y = f(x)$ зберігається;
- при $x < 0$ частина графіка функції $y = f(x)$ при $x \geq 0$ симетрично відображається відносно осі Оу. (Рис. 4.33)

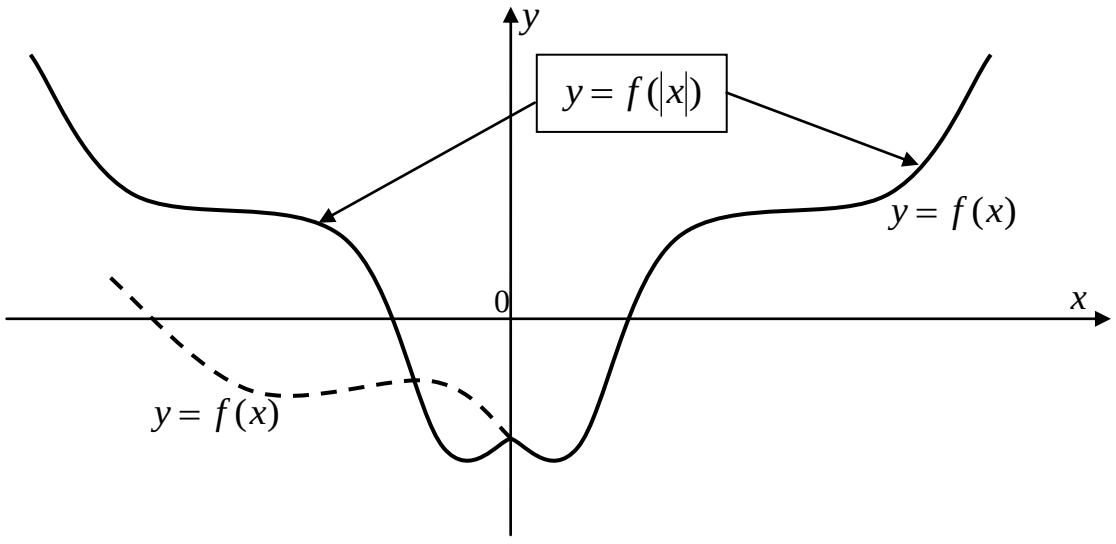


Рис. 4.33

6. $y = A \cdot f(x)$

Графік функції $y = A \cdot f(x)$ дістанемо з графіка $y = f(x)$ «розтягненням» уздовж осі Oy в А «разів» при А> 1 і «стисненням» уздовж цієї осі в 1/А разів при 0<А<1. (Рис. 4.34)

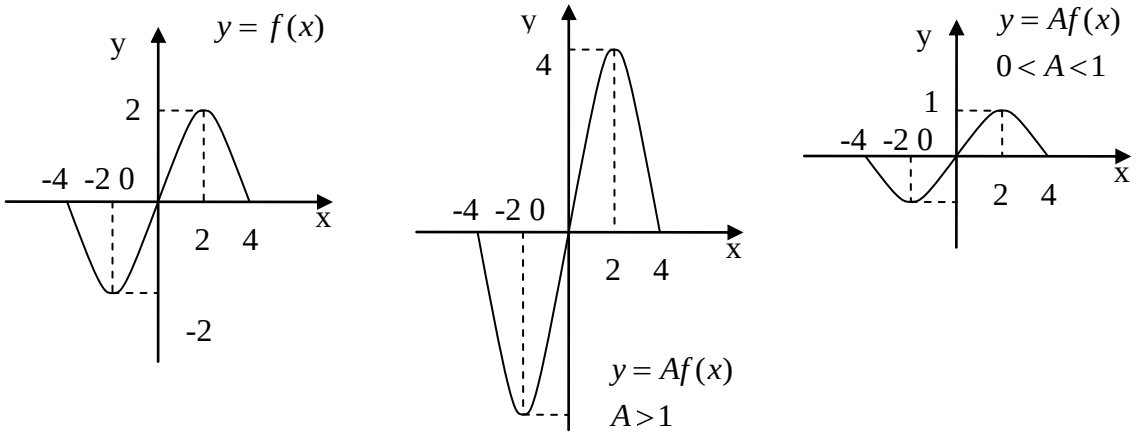


Рис. 4.34

7. $y = f(\omega \cdot x)$

Графік функції $y = f(\omega \cdot x)$ дістанемо «стисканням» графік $y = f(x)$ у ω разів до осі Oy при $\omega > 1$ або «розтягненням» в $1/\omega$ разів від цієї осі Oy при $0 < \omega < 1$. (Рис. 4.35)

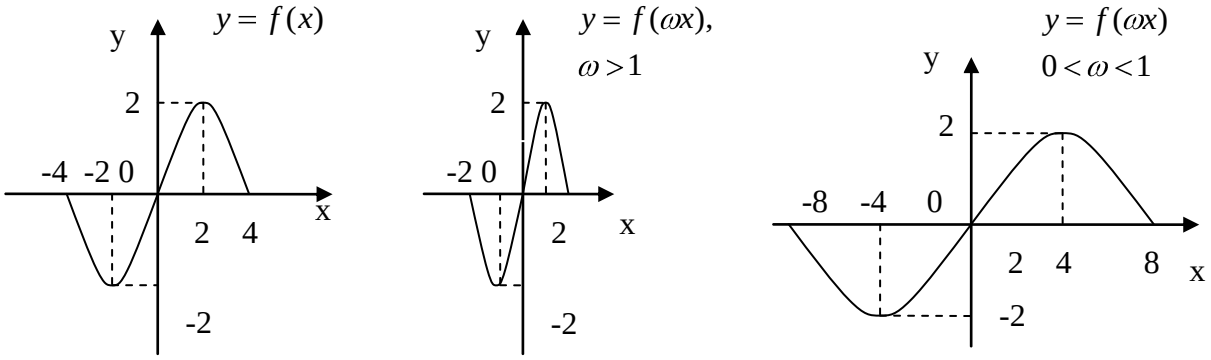


Рис. 4.35

8. $y = f(-x)$

Графік функції дістаємо симетричним відображенням (дзеркальним відображенням) графіка $y = f(x)$ відносно осі Oy. (рис. 4.36)

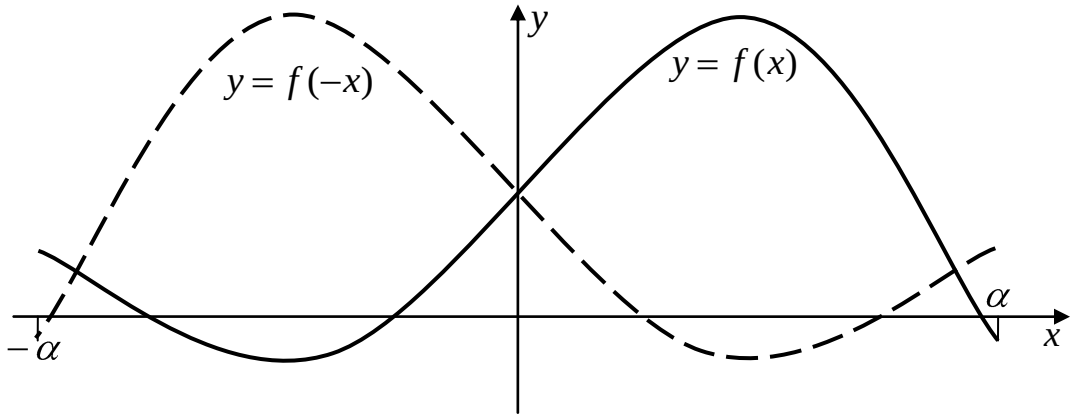


Рис. 4.36

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЇ БЕЗ ВИКОРИСТАННЯ ПОХІДНОЇ

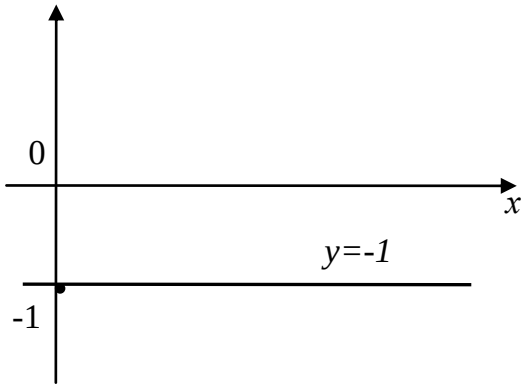


Рис. 1

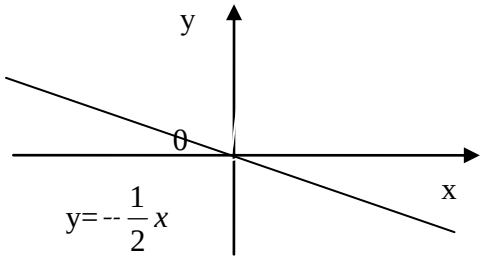


Рис. 2

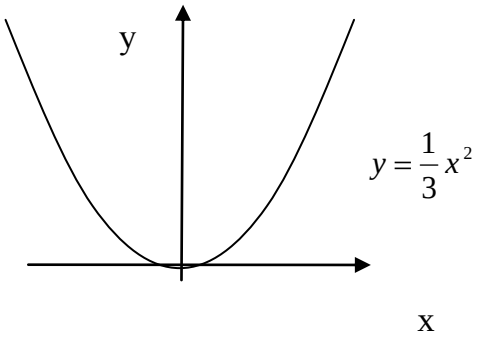


Рис. 3

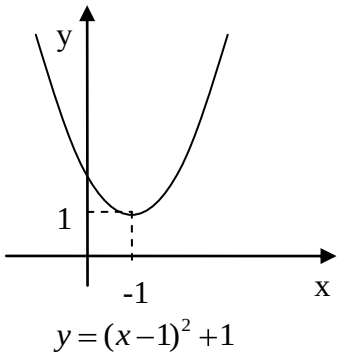


Рис. 4

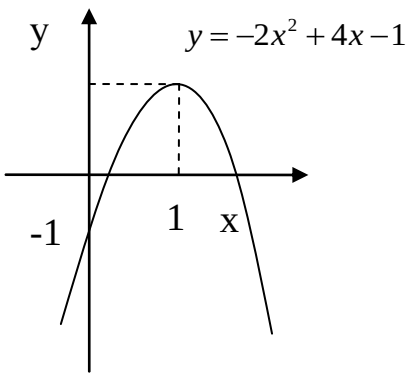


Рис. 5

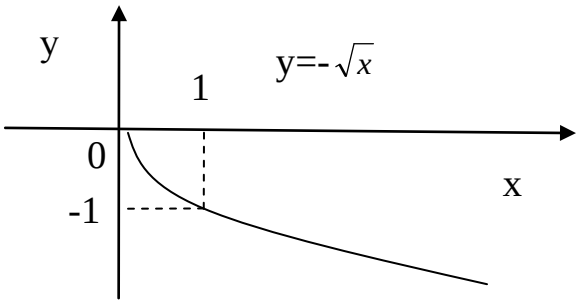


Рис. 6

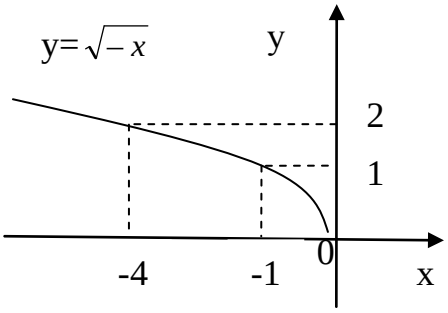


Рис. 7

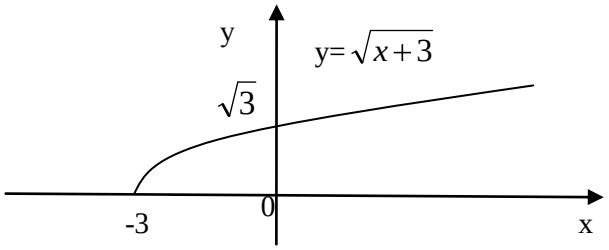


Рис. 8

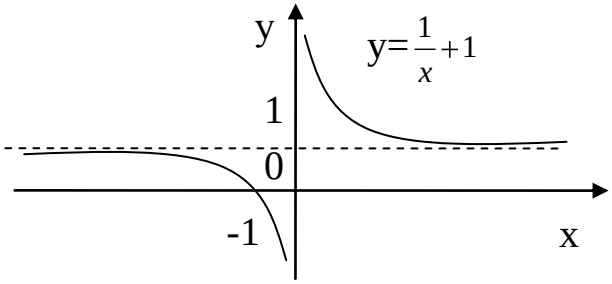


Рис. 9

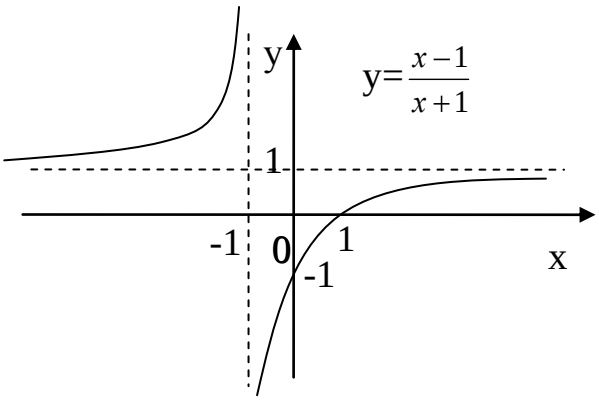


Рис. 10

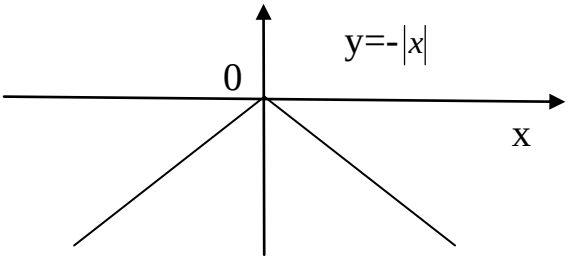


Рис. 11

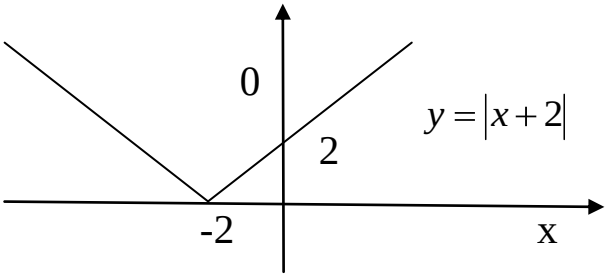


Рис. 12

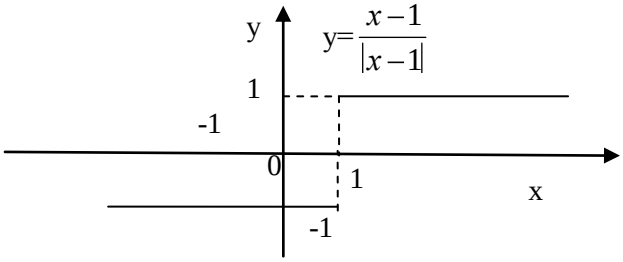


Рис. 13

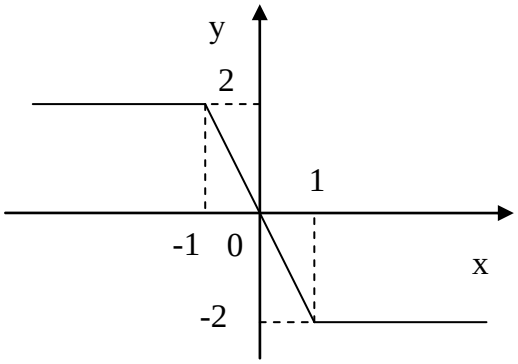


Рис. 14

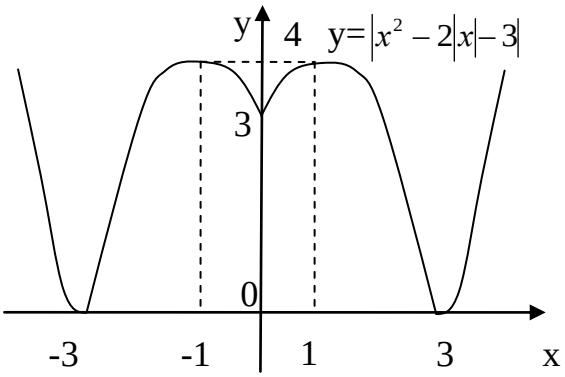


Рис. 15

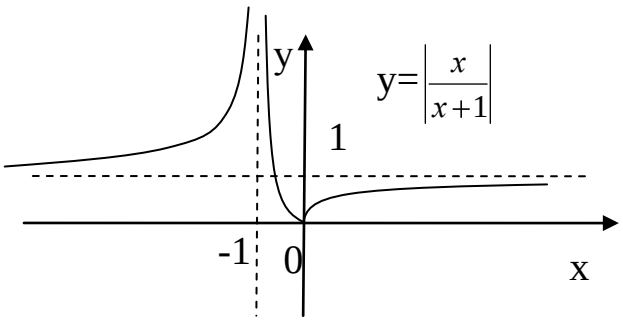


Рис. 16

РОЗДІЛ 5 Г р а н и ц я

§ 5.1 Числова послідовність

З поняттям числової послідовності ми зустрічались під час вивчення шкільного курсу алгебри. Зокрема, числовими послідовностями є арифметична та геометрична прогресії. Сформулюємо означення числової послідовності у загальному вигляді.

Означення: *Якщо кожному натуральному числу* $n \in N$ *за певним правилом ставиться у відповідність число* x_n, *то множину чисел*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{5.1}$$

називають числовою послідовністю і позначають символом $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ... називають членами або елементами послідовності.

x_n - n-й, або загальний член послідовності.

За означенням послідовність містить ***нескінченну кількість*** членів, причому будь-які два з них відрізняються, принаймні, номерами.

Геометрично послідовність зображується на числовій осі у вигляді послідовності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності. Можна також зображати послідовність точками координатної площини *Oxy,* відкладаючи на осі *Ox* номери членів послідовності, а на осі *Oy* - відповідні члени.

Послідовність вважається заданою, якщо вказано спосіб визначення будь-якого її члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена. Тому будь-яка функція, що задана на множині натуральних чисел N, задає відповідну числову послідовність $\{y_n\}$ із загальним членом $y_n = f(n)$. Послідовність може бути заданою також рекурентним або словесним способом.

Наприклад: $x_n = \dfrac{3n-1}{5n}, \Rightarrow x_1 = \dfrac{3\cdot 1-1}{5\cdot 1} = \dfrac{2}{5};\ x_2 = \dfrac{3\cdot 2-1}{5\cdot 2} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2};$

$$x_3 = \frac{3\cdot 3-1}{5\cdot 3} = \frac{8}{15};\ x_4 = \frac{3\cdot 4-1}{5\cdot 4} = \frac{11}{20};\ x_5 = \frac{3\cdot 5-1}{5\cdot 5} = \frac{14}{25}$$

$$\{x_n\} = \left\{\frac{2}{5}; \frac{5}{10}; \frac{8}{15}; \frac{11}{20}; \frac{14}{25}; \ldots\right\}$$

§ 5.2 Границя числової послідовності.

Нехай змінна x_n пробігає значення послідовності $\{x_n\}$, *тобто є* дискретною змінною.

Означення: *Число x_0 називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх n> N виконується нерівність*

$$\left|x_n - x_0\right| < \varepsilon \tag{5.2}$$

Якщо число x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то записують

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{5.3}$$

і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$, *або* змінна x_n, має границю, яка дорівнює числу x_0 або прямує до x_0. Послідовність, яка має границю, називається ***збіжною***. Послідовність, яка не є збіжною, називається ***розбіжною***.

Нерівність (5.2) рівносильна подвійній нерівності $-\varepsilon < x_n - x_0 < \varepsilon$, або

$$x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon \tag{5.4}$$

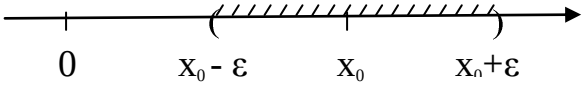


Рис. 5.1

яка показує, що елементи x_n, знаходиться в так званому ***«епсилон-околі»*** точки x_0 (рис. 5.1). Тому означення границі геометрично можна сформулювати так:

Означення: *Число x_0 називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для довільного «ε – околу» точки x_0 існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі значення x_n, для яких n > N, попадають в цей окіл.*

Поза цим околом може залишитися хіба що скінчена кількість членів послідовності.

Прикладами числових послідовностей є арифметична і геометрична прогресії. Тут загальні члени задають такими формулами:

$$y_n = y_1 + d(n-1), \qquad z_n = z_1 q^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3\ldots,$$

де d - різниця арифметичної прогресії; q - знаменник геометричної прогресії. Розглянемо ще приклади числових послідовностей.

П р и к л а д : Нехай загальний член послідовності задано формулою $y_n = \frac{1}{n}$, n = 1,2,3,4,… . Тоді, надаючи n значення 1, 2, ..., дістанемо числову послідовність

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \tag{5.5}$$

Члени даної послідовності із збільшенням числа n спадають: кожний наступний член менший за попередній, тобто для всіх n = 1, 2, 3,... виконується нерівність $y_{n+1} < y_n$. Із збільшенням числа n відповідні члени послідовності, залишаючись додатними числами, стають ближчими до нуля. Так, другий член послідовності міститься ближче до нуля, ніж перший член цієї ж послідовності, третій член послідовності знаходиться ближче до нуля ніж другий, $(n+1)-й$ член ближче до нуля, ніж $n-й$ член

Що означають слова: «члени послідовності із збільшенням числа n стають все ближчими і ближчими до числа нуль»? Це означає, що із збільшенням числа n відстань між відповідними членами послідовності і числом нуль стає все меншою і меншою. Оскільки відстань між двома дійсними числами a і b, або, що те саме, між двома точками a і b числової осі дорівнює додатному числу $|a-b|$,то в даному разі модуль різниці $|y_n - 0| = \frac{1}{n}$ - при зростанні n стає все меншим і меншим. Зокрема, цей модуль може бути меншим, наприклад, за числа 0,1; 0,01; 0,001 і т.д. Для цього в послідовності досить взяти відповідно члени з номерами, більшими за 10, 100, 1000 і т. д.

А якщо взяти, наприклад, довільне додатне число ε, то чи знайдеться в послідовності (5.5) її член (його номер N) такий, щоб для всіх наступних членів цієї послідовності виконувалася нерівність $\frac{1}{\mathrm{n}} < \varepsilon$?

Відповідь стверджувальна. Для цього досить брати члени послідовності y_n, у яких номер n задовольняє нерівність $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Позначимо через y_n такий член в послідовності, що при n > N виконується нерівність $|y_n - 0| < \varepsilon$. Зрозуміло, що для кожного окремого значення числа ε існує своє натуральне число *N*. У таблиці для різних значень ε наведено відповідні значення *N*.

Таблиця 5.1

ε	*0,1*	*0,01*	*0,001*	*0,0001*	*0,00001*	*0,000001*
N	*10*	*100*	*1000*	*10 000*	*100 000*	*1000 000*

П р и к л а д Розглянемо послідовність, загальний член якої заданий формулою $y_n = \frac{1}{n^2}$, n = 1, 2 … .Дістанемо таку числову послідовність:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \ldots \tag{5.6}$$

члени якої, із зростанням числа n, спадають і наближаються до числа нуль. І чим більше число n, тим відповідний член послідовності местиметься ближче до нуля. Іншими словами, відстань $|y_n - 0|$ при зростанні n стає як завгодно малою, тобто у послідовності (5.6) знайдеться член y_N такий, що для всіх n > N буде справджуватися нерівність

$$|y_n - 0| < \varepsilon \tag{5.7}$$

де ε — довільне додатне число. Надаючи є довільних додатних значень, щоразу матимемо шукане число N.

Щоб знайти *N* для будь-якого наперед заданого додатного числа ε, підставимо в нерівність (5.7) значення y_n і розв'яжемо записану нерівність відносно n. Дістанемо:

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \ \Rightarrow\ \frac{1}{n^2} < \varepsilon \ \Rightarrow\ n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{5.8}$$

Отже, нерівність (5.7) буде справджуватися для всіх значень n, які задовольняють нерівність (5.8). Тому за число *N* можна взяти число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, якщо воно ціле, або найбільшу цілу частину цього числа, якщо це число є дробовим. Проілюструємо сказане за допомогою таблиці.

Таблиця 5.2

ε	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$
N	*2*	*3*	*4*	*5*	*10*	*31*	*100*

Тоді для числа N у першому і другому прикладах маємо такі формули:

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad N = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

Розглянемо ще приклади.

Приклад Показати, що границя послідовності $\frac{4}{1}, \frac{7}{3}, ..., \frac{3n+1}{2n-1}, ...$, дорівнює $\frac{3}{2}$, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Згідно з означенням границі, слід показати, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\left| y_n - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$$

Підставляючи у дану нерівність значення y_n, дістанемо:

$\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$. Звідси $\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon$. Розв'язавши нерівність відносно n, знаходимо $n > \frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$.

Отже існує шукане число $N = \frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{3}{2}$.

§ 5.3 Нескінченно малі числові послідовності

Серед функцій натурального аргументу особливе місце відводиться так званим нескінченно малим послідовностям.

Послідовність $y_n = f(n)$, n = 1, 2, 3... називається нескінченно малою, якщо

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Або *числова послідовність $\{y_n\}$ називається нескінченно малою, якщо для будь-якого додатного числа є існує натуральне число N таке, що для всіх n > N виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$.*

Наприклад, послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ є нескінченно малими.

Отже, члени послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів, стають за модулем як завгодно малими.

Не слід плутати нескінченно малу числову послідовність з досить малим числом. Окремі члени нескінченно малої числової послідовності можуть бути як завгодно великими числами. Так наприклад, послідовність $\left(\frac{10^{10} n}{n^2+1}\right)$ є

нескінченно малою, бо $\left|\frac{10^{10}n}{n^2+1}\right| < \varepsilon$, якщо n більше, наприклад, від числа $\frac{10^{10}}{\varepsilon}$.

Але окремі значення $\frac{10^{10}}{2}$, $\frac{10^{10}\cdot 2}{5}$, $\frac{10^{10}\cdot 3}{10}$ не є малими числами.

Нескінченно малі послідовності позначають через $\{\alpha_n\}, \{A_n\}, \{\gamma_n\}$.

Наступні теореми встановлюють тісний зв'язок між послідовністю $\{y_n\}$, яка має границю, і нескінченно малою послідовністю.

Теорема 1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$, то послідовність $\{y_n - A\}$ є нескінченно малою.

Д о в е д е н н я . Яке б не було число $\varepsilon > 0$, знайдеться таке *N,* що для всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|y_n - A| < \varepsilon$, або $|\alpha_n| < \varepsilon$ (n > N), тобто $\{\alpha_n\}$ - нескінченно мала послідовність.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема 2. Якщо різниця між y_n і числом A є нескінченно малою послідовністю, то A є границею послідовності y_n.

Д о в е д е н н я . Позначимо $\alpha_n = y_n - A$. Тоді $y_n - A$ є нескінченно малою послідовністю. Тобто для будь-якого числа ε знайдеться таке N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$, або, що те саме, $|y_n - A| < \varepsilon$. Отже, згідно з означенням границі, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. Доведені теореми дають змогу навести ще й таке означення границі послідовності.

Означення: *Число* ***A*** *називається границею числової послідовності $\{y_n\}$, якщо різниця між y_n і числом* ***A*** *є нескінченно малою послідовністю, тобто $\{y_n - A\}$, де $\{\alpha_n\}$ - нескінченно мала послідовність.*

Нескінченно малі послідовності мають такі властивості.

В л а с т и в і с т ь 1. Алгебраїчна сума скінченого числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Заради простоти припустимо, що маємо дві нескінченно малі послідовності $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$.Треба показати, що послідовність $\{\gamma_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\}$ є також нескінченно малою. Для цього задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою послідовністю, то для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ існує таке число N_1, що для всіх $n > N_1$ виконуватиметься нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Існує також і число N_2, що для всіх $n > N_2$ виконуватиметься нерівність $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Візьмемо тепер число N, яке

більше за числа N_1 *і* N_2. Тоді для всіх $n > N$ одночасно виконуються обидві нерівності.

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Використовуючи властивість модуля суми, дістанемо:

$$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|$$

Згідно з попередніми нерівностями, $\gamma_n < \varepsilon$, $(n > N)$.

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести справедливість цієї властивості і для будь-якого (певного) числа нескінченно малих послідовностей.

Приклад. Довести, що послідовність із загальним членом $y_n = \frac{n+1}{n^2}$ є нескінченно малою.

Розв'язання. У правій частині рівності виконаємо ділення. Маємо: $y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ Кожний доданок тут є нескінченно малою числовою послідовністю. Згідно з властивістю 1 робимо висновок, що послідовність є нескінченно малою.

Перш ніж сформулювати наступну властивість, наведемо таке означення.

Означення: *Послідовність* $\{y_n\}$ *називається обмеженою, якщо існує число* $M > 0$, *що для всіх значень n = 1,2,3 ... виконується нерівність* $|y_n| < M$

Наприклад, послідовність $\{(-1)^n\}$ є обмеженою. Тут $|(-1)^n|=1$. Тому за число *M* можна взяти, наприклад, число 2. Тоді для всіх *n* = 1, 2, ... справджуватиметься нерівність $|(-1)^n| < 2$.

Послідовність $y_n = \cos\frac{\pi n}{2}$, *n* = 1, 2, ... є також обмеженою. Тут $\left|\cos\frac{\pi n}{2}\right| \le 1$ n = 1, 2, ..., тоді як послідовність $y_n = n^2$; n=1, 2, ... не є обмеженою.

Властивість 2. Добуток нескінченно малої числової послідовності на обмежену послідовність є нескінченно малою числовою послідовністю.

Нехай $\{y_n\}$ є обмеженою послідовністю, а $\{\alpha_n\}$ - нескінченно малою. Покажемо, що $\{z_n\} = \{y_n \cdot \alpha_n\}$ є нескінченно малою числовою послідовністю.

Оскільки $\{y_n\}$ є обмеженою послідовністю, то існує таке число *M,* що для всіх n справджується нерівність $|y_n| < M$.

Оскільки $\{\alpha_n\}$ є нескінченно малою послідовністю, то яке б ми не взяли число, зокрема число $\frac{\varepsilon}{M}$, де ε > 0, знайдеться таке число *N*, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Тоді $|\beta_n| = |y_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$

З нерівності $|\beta_n| < \varepsilon$, $(n > N)$ випливає справедливість доводжуваного твердження.

§ 5.4 Нескінченно великі числові послідовності

У цьому параграфі розглянемо нескінченно великі числові послідовності.

Означення: *Послідовність* $\{y_n\}$ *називається нескінченно великою, якщо, яке б не було наперед задане число* $M > 0$, *існує таке число N (що залежить від M) , що для всіх* $n > N$ *виконується нерівність* $|y_n| > M$. *Це записують так:*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \qquad (5.9)$$

Наприклад, послідовності $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\{(-1)^n n\}$ є нескінченно великі.

Доведемо, наприклад, що $\{(-1)^n n\}$ є нескінченно велика послідовність. Справді, для довільного числа $M > 0$, починаючи з деякого номера M_1, маємо $|y_n| = |(-1)^n n| = n > M$. Члени заданої послідовності необмежено зростають за модулем, набуваючи то додатних, то від'ємних значень. Якщо

$$M = 100, \Rightarrow |y_n| = n > 100, \Rightarrow n = 101, 102, \ldots . \Rightarrow M_1 = 101$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

Слід зауважити, що необмежена числова послідовність може й не бути нескінченно великою. Так, числова послідовність $\{y_n\}$, де

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad n = 2k \\ n! & \text{при} \quad n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots . \end{cases}$$

є необмеженою і не є нескінченно великою.

Якщо члени нескінченно великої послідовності, починаючи з певного *n* і для всіх наступних його значень, є додатні, то цей факт символічно записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Якщо ж члени нескінченно великої послідовності, починаючи з певного *n* і для всіх наступних його значень від'ємні, то це записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

Наприклад, $y_n = 1000 - n$, починаючи з n = 1001 і для всіх $n > 1001$, набуває від'ємних значень. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}(1000-n) = -\infty$

Існує тісний зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими числовими послідовностями. Цей зв'язок встановлюють такі теореми.

Теорема 3. Якщо y_n є нескінченно велика числова послідовність, то послідовність $\alpha_n = \left\{ 1/y_n \right\}$ є нескінченно малою.

Доведення. Оскільки y_n є нескінченно велика послідовність, то яке б ми не взяли число $M > 0$, існує таке число N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n| > M$. Нехай $M = \frac{1}{\varepsilon}$ - де є довільне додатне число.

Тоді $|y_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ $(n > N)$, або $|\alpha_n| < \varepsilon$ $(n > N)$. Теорему доведено.

Теорема 4. (Обернена теорема**). Якщо послідовність α_n є нескінченно мала числова послідовність і $\alpha_n \neq 0$ для всіх $n = 1,2,3,\ldots$ то послідовність $y_n = \left\{ 1/\alpha_n \right\}$ є нескінченно велика.**

Доведення. Оскільки за умовою теореми α_n - нескінченно мала послідовність, то для будь-якого числа ε > 0, наприклад, для $\varepsilon = \frac{1}{M}$, де $M > 0$ — будь-яке дійсне число, існує натуральне число $N = N(M)$ таке, що для всіх значень $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \frac{1}{M}$. Позначимо $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$. Тоді

$$\frac{1}{|\alpha_n|} = \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = |y_n| > M,\ n > N$$

Теорема доведена.

Приклад. Довести, що послідовність $\alpha_n = \{a^n\}$, $0<a<1$ є нескінченно мала.

Розв'язання. Запишемо число a у вигляді

$$a = \frac{1}{1/a}$$

Введемо позначення $\frac{1}{a} = b$. Оскільки $0 < a < 1$, то число $b > 1$. Отже, числову послідовність α_n можна записати так:

$$\alpha_n = \left\{ \frac{1}{b^n} \right\}, \quad n = 1, 2,$$

Звідси, враховуючи, що послідовність b_n $b > 1$ є нескінченно велика, робимо висновок: послідовність α_n є нескінченно мала.

§ 5.5 Основні теореми про границі

Знаходження границі числової послідовності на основі тільки означення границі викликає часто певні труднощі, оскільки: треба наперед знати «підозріле» на границю число; не кожного разу за заданим ε можна знайти *N*.

Тому на практиці для знаходження границі числових послідовностей користуються такими теоремами.

Теорема 1. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають відповідно границі A і B, то послідовність $\{x_n + y_n\}$ має границю $A+B$.

Доведення. Якщо A і B є відповідно границі $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, то $x_n = A+\alpha_n$; $y_n = B+\beta_n$, де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ - нескінченно малі послідовності.

Додавши почленно ці рівності, дістанемо $x_n + y_n = A+B+\alpha_n+\beta_n$.

Отже, послідовність $x_n + y_n$ подано у вигляді суми сталого числа $A+B$ і нескінченно малої послідовності $(\alpha_n+\beta_n)$. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ і вона дорівнює *A+B*, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n)=\lim_{n\to\infty}(y_n)=A+B$$

Теорема 2. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають відповідно границі *A і B*, то послідовність $\{x_n\cdot y_n\}$ має границю, яка дорівнює $A\cdot B$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n)\cdot\lim_{n\to\infty}(y_n)=A\cdot B$$

Доведення. Послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ за умовою даної теореми, можна подати у вигляді $x_n = A+\alpha_n$, $y_n = B+\beta_n$, де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ - нескінченно малі послідовності. Тоді $x_n\cdot y_n = (A+\alpha_n)\cdot(B+\beta_n) = AB+A\beta_n+B\alpha_n+\alpha_n\beta_n$

У даній рівності сума останніх трьох доданків є нескінченно малою величиною. Тому

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}(AB+A\beta_n+B\alpha_n+\alpha_n\beta_n)=A\cdot B$$

Теорему доведено.

Зазначимо, що теореми 1 і 2 справедливі й для більшого числа доданків (співмножників).

З теореми 2 випливають н а с л і д к и .

а) сталий множник можна виносити за знак границі. Справді, нехай $x_n = c$, а y_n має границю. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n)=\lim_{n\to\infty}(y_n)=c\cdot\lim_{n\to\infty}(y_n)$$

б) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і k - натуральне число, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n{}^k) = \lim_{n\to\infty}(x_n)^k = a^k$$

Теорема 3. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають скінченні границі, які відповідно дорівнюють $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, причому $B \neq 0$, то послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ має скінчену границю, яка дорівнює $\frac{A}{B}$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, тоді

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha_n}{B+\beta_n} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B\cdot y_n}(B\alpha_n - A\beta_n),$$

де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ - нескінченно малі послідовності.

Послідовність $\left\{\frac{1}{B\cdot y_n}\right\}$ є обмеженою, а послідовність $\{B\alpha_n - A\beta_n\}$ є нескінченно малою.

Таким чином, послідовність $\{x_n\}$ є $\left\{\frac{1}{By_n}(B\alpha_n - A\beta_n)\right\}$ є нескінченно малою.

Тому $\frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B} + \gamma_n$. Теорему доведено.

Послідовність $\{x_n\}$ називають неспадною (не зростаючою), якщо для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність

$$y_{n+1} \geq y_n \quad (y_{n+1} \leq y_n),$$

тобто значення кожного наступного члена послідовності не менші (не більші) за значення попереднього її члена. Неспадні та не зростаючі послідовності називають **монотонними.**

Якщо значення членів монотонної послідовності $\{y_n\}$ для будь-якого $n \in N$ задовольняють строгу нерівність $y_{n+1} > y_n$ $(y_{n+1} < y_n)$, то послідовність y_n називають зростаючою (спадною). Зростаючі та спадні послідовності називають також строго монотонними.

Сформулюємо без доведення ще дві важливі теореми, які стосуються існування границі **ЧИСЛОВОЇ** послідовності.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Зростаюча або спадна обмежена послідовність має границю.

Теорема 5. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю A, то ця границя єдина.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\sin n^2+a^{\frac{1}{n}}\right)$, $a>1$.

(За означенням $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n$; читають «ен факторіал».)

Розв'язання. Використаємо теорему про границю суми. Для цього з'ясуємо, чи існують границі доданків. Послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\},\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ є нескінченно малими, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$. Послідовність $(\sin n^2)$ є обмеженою $\left|\sin n^2\right|\le 1$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sin n^2=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$. Границі доданків існують. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sin n^2+a^{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\sin n^2+\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$

Розв'язання. Для знаходження цієї границі використаємо теорему про границю частки. Для цього знайдемо окремо границю чисельника і знаменника, використовуючи формулу суми n членів геометричної прогресії:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}\right)=\frac{3}{2}$$

Отже, границі послідовності у чисельнику і знаменнику заданого дробу існують, причому границя знаменника не дорівнює нулю. Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\frac{2}{3/2}=\frac{4}{3}$$

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=1$ ($a>1$).

Розв'язання. Запишемо степінь a у вигляді $a^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ $(a>1)$, то до попереднього відношення можна застосувати теорему про границю частки. Тоді матимемо $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1$

§ 5.6 Границя змінної та її властивості

Нехай змінна величина x набуває всіх числових значень деякого скінченого проміжку X, тобто є неперервною змінною. Із всієї множини змінних величин виділимо такі, процес зміни яких відбувається особливим чином, що дозволяє назвати ці величини прямуючими до границі.

Якщо постійне число a належить проміжку X, або лежить на границі проміжку, то для неперервної змінної величини можна побудувати безліч послідовностей тих значень, які може набувати x, які мають одну особливість – по будь-якій із побудованих послідовностей x наближається до a. Отже границею неперервної змінної величини є границя послідовності тих значень, які ця змінна набуває.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \lim x = a \qquad (5.10)$$

Можна дати такі означення границі змінної величини.

Означення: *Постійне число a називається **границею змінної величини x**, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке значення $\tilde{x}$, починаючи з якого для всіх наступних значень x виконується нерівність $|x-a| < \varepsilon$ і пишуть $\lim x = a$ або $x \to a$.*

Означення: *Постійна величина a називається **границею змінної величини x**, якщо абсолютна величина різниці $x-a$ є величиною нескінченно малою, тобто $|x-a| < \varepsilon$.*

З цього означення границі випливає, що границя нескінченно малої змінної величини дорівнює нулю, тобто $\lim \alpha = 0$ або $\alpha \to 0$.

Нескінченно велика величина x границі не має, але умовно вважають, що границя нескінченно великої величини є ∞, тобто $|x| \to \infty$ або $\lim x = \pm\infty$.

Із означень випливає: якщо в процесі своєї зміни змінна величина має границю, то лише одну, а саме змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу величину, тобто $x = a + \gamma$. Саме цей факт в математичному аналізі часто використовується.

§ 5.7 Границя функції в точці

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$ на множині X і, припустимо, що незалежна змінна x має границю a. Розглянемо поведінку значень функції при $x \to a$. Вважаємо що функція визначена в деякому околі точки a, за винятком, можливо, самої точки a.

Означення: *Число G називається* ***границею функції*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to a$, *якщо для довільної збіжної до a послідовності $\{x_n\}$, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ має границю, яка дорівнює числу G, і записують*

$$\lim_{x \to a} f(x) = G$$

Дане означення границі функції базується на понятті границі послідовності, тому його називають означенням на «мові послідовностей», або означенням границі за ГЕЙНЕ (Гейне Генріх Едуард ,1821-1881)

Означення: *Число K називається* ***границею функції*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to x_0$ *якщо для будь-якого наперед заданого, як завгодно малого $\varepsilon > 0$, знайдеться таке число $\delta > 0$, що для усіх x, відмінних від x_0 і які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - K| < \varepsilon$.*

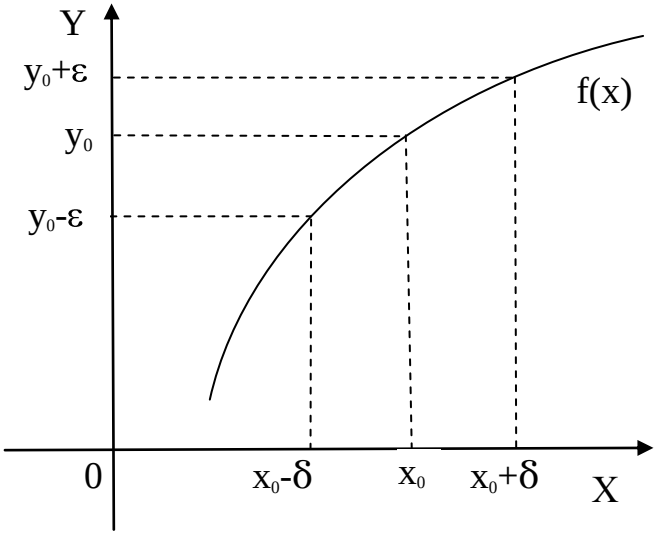


Рис. 5.2

Дане означення називають означенням на мові «$\varepsilon - \delta$», або означенням границі за КОШІ (Коші Огюстен Луї, 1789-1857). Відмітимо, що δ залежить від ε і найчастіше зменшується, коли зменшується ε (Рис. 5.2).

Можна показати, що ці означення еквівалентні.

Зауваження *Якщо функція* $y = f(x)$ *має границею число* A *лише при умові, що* $x \to x_0$ ***зліва****, то використовують такий запис:*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$$

а число А, називають ***односторонньою границею функції*** $y = f(x)$ ***зліва.***

Якщо число B *є границею функції* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *справа, то використовують запис:*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B,$$

а число B *називають* ***односторонньою границею функції*** $y = f(x)$ ***справа****.. Ці границі функцій називають* ***односторонніми****.*

Для існування границі A функції $y = f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб існували в цій точці границі функції зліва та справа і щоб вони були рівні, тобто $A = B$.

§5.8 Неперервність і точки розриву функції

Означення: *Функція* $y = f(x)$ *називається неперервною в точці* x_0*, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу* Δx *відповідає нескінченно малий приріст функції* Δy*, тобто якщо*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Для неперервності функції $y = f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо виконання таких умов: (Рис. 5.3)

1) функція повинна бути визначена в деякому інтервалі, що містить точку x_0 (тобто в самій точці x_0 і по поблизу цієї точки);
2) функція повинна мати однакові односторонні границі:
$$\lim_{x \to x_0 - \varepsilon} f(x) = \lim_{x \to x_0 + \varepsilon} f(x) \quad (\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x))$$
3) ці односторонні границі повинні дорівнювати $f(x_0)$ - значенню функції в точці x_0.
$$\lim_{x \to x_0 - \varepsilon} f(x) = \lim_{x \to x_0 + \varepsilon} f(x) = f(x_0)$$

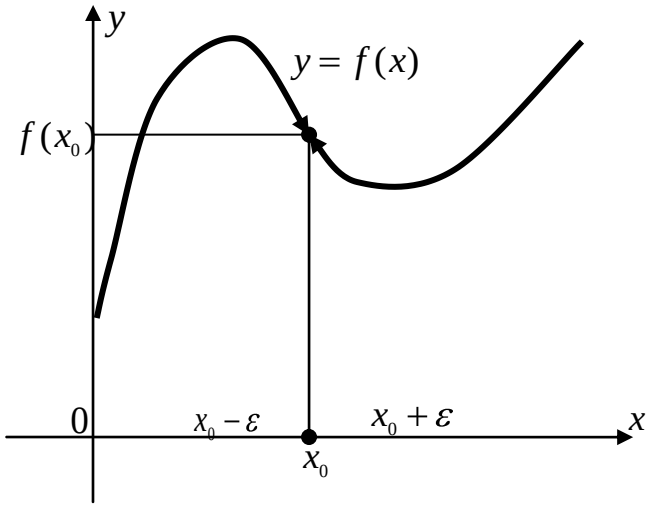


Рис. 5.3

Функція $f(x)$ називається *розривною* в точці x_0, якщо вона визначена в як завгодно близьких точках, але в самій точці x_0 не задовольняє хоча б одній з умов неперервності.

Розрив функції $f(x)$ в точці x_0 називається *скінченим*, або розривом

1-го роду, якщо існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{x\to x_0-\varepsilon} f(x)=A \quad \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A\right) \text{ і } \lim_{x\to x_0+\varepsilon} f(x)=B \quad \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=B\right).$$

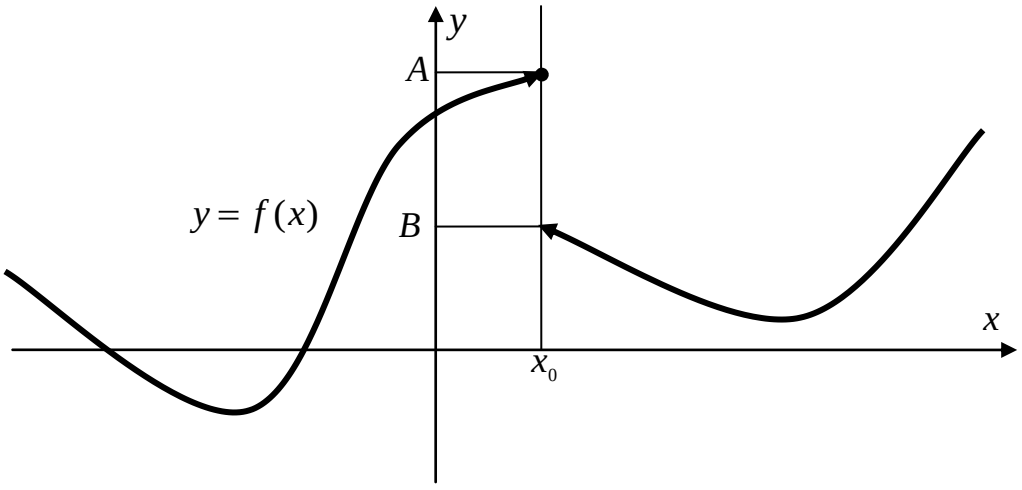


Рис. 5.4

$$\lim_{x\to x_0-\varepsilon} f(x)=A=f(x_0)\neq \lim_{x\to x_0+\varepsilon} f(x)=B$$

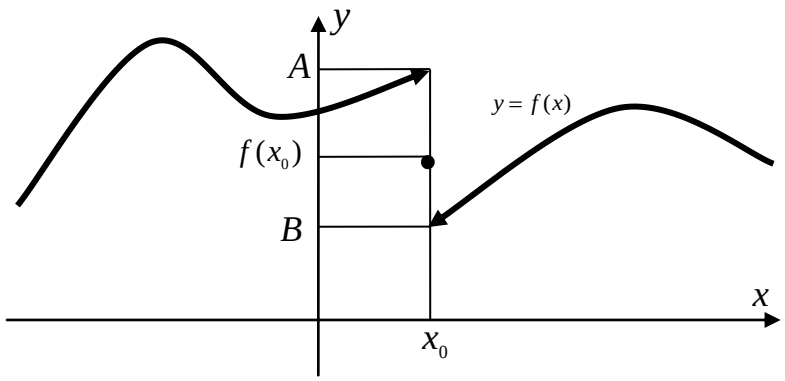


Рис. 5.5

$$\lim_{x \to x_0 - \varepsilon} f(x) = A \neq f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0 + \varepsilon} f(x) = B$$

Всі інші випадки розриву функції називаються розривами ***другого роду***. Зокрема, якщо хоча б одна з односторонніх границь буде нескінченною, то розрив функції називається *нескінченним.*

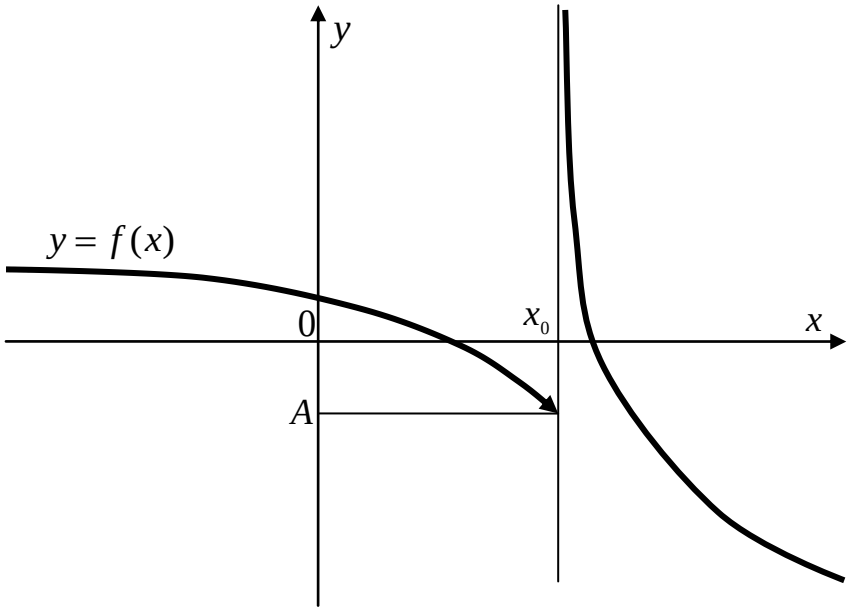


Рис. 5.6

$$\lim_{x \to x_0 - \varepsilon} f(x) = A; \qquad \lim_{x \to x_0 + \varepsilon} f(x) = \infty$$

Функція називається *неперервною на інтервалі*, якщо вона неперервна в усіх точках цього інтервалу.

При знаходженні точок розриву функції можна керуватись такими положеннями:

1) елементарна функція може мати розрив в окремих точках, але не може бути розривною у всіх точках будь-якого інтервалу;

2) елементарна функція може мати розрив лише в тій точці, де вона не визначена;

3) якщо функція задана декількома різними аналітичними виразами для різних інтервалів зміни аргументу, то вона може мати розриви в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

§ 5.9 Ознаки існування границі змінної величини.

Не слід вважати, що будь-яка змінна величина має границю. Розглянемо, наприклад, послідовність

$$x_n = (-1)^{n-1} :\Longrightarrow \{1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots,\}$$

Ця послідовність не має границі тому, що при будь-якому n сусідні два значення цієї змінної відрізняються на дві одиниці. Отже, для $\varepsilon < 1$ на числовій осі не має такої точки, ε - окіл якої містив би усі значення x, починаючи з деякого N.

В курсі математичного аналізу доведені такі ознаки існування границі змінної величини.

Ознака 1. *Якщо в одному процесі змінна величина y заключна між двома іншими змінними x та z, які мають однакову границю A, то й змінна величина y має границю, що дорівнює A. Іншими словами: якщо $x \le y \le z$, та $\lim x = A,\ \lim z = A,$ то y також має границю $\lim y = A$*

Ознака 2. *Обмежена монотонна змінна величина має границю.*

Ця ознака вказує, умови, при яких існує границя змінної величини. Перша ознака вказує не тільки умови існування границі змінної величини, але й величину самої границі.

§ 5.10 Основні теореми границі змінної величини.

Теорема 1. ***Якщо x=C – постійна велична, то $\lim C = C$, тобто, границя постійної величини дорівнює самій постійній.***

Дійсно, якщо усі значення x дорівнюють C, то виконується нерівність $|x - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$, де ε - скільки завгодно мале додатне число. Ця нерівність означає, що C є границею $x=C$.

Теорема 2. ***Границя алгебраїчної суми скінченої кількості змінних величин, що мають границі, дорівнює такій самій алгебраїчній сумі границь доданків, тобто***

$$\lim(x \pm y \pm \ldots z) = \lim x \pm \lim y \pm \ldots \lim z.$$

Доведення. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b, \ldots, \lim z = c$. Змінна величина відрізняється від своєї границі а нескінченно малу величину, тому можна записати:

$$x = a + \alpha,\ \ y = b + \beta, \ldots, z = c + \gamma,$$

де $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ - нескінченно малі личини. Тепер маємо:

$$x \pm y \pm \ldots z = (a \pm b \pm \ldots \pm c) + (\alpha \pm \beta \pm \ldots \pm \gamma).$$

В останній дужці правої частини цієї рівності маємо нескінченно малу величину, а в першій дужці – постійна величина. Отже,

$$\lim(x \pm y \pm \ldots z) = a \pm b \pm \ldots \pm c = \lim x \pm \lim y \pm \ldots \lim z,$$

що й треба було довести.

Теорема 3. ***Границя добутку скінченої кількості змінних величин, що мають границю, дорівнює добутку границь множників , тобто***

$$\lim(x \cdot y \cdot \ldots \cdot z) = \lim x \cdot \lim y \cdot \ldots \cdot \lim z.$$

Доведення. Спочатку доведемо твердження теореми для двох множників. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b$, тоді $x = a + \alpha, y = b + \beta,$ де α та β - нескінченно малі величини. Тоді $x \cdot y = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta$

Згідно з властивостями нескінченно малих величин

$$\gamma = a \cdot \beta + \alpha \cdot b + \alpha \cdot \beta$$

також нескінченно мала. Тому

$$x \cdot y = a \cdot b + \gamma \text{ або } \lim(x \cdot y) = a \cdot b = \lim x \cdot \lim y.$$

Тим самим твердження теореми для двох множників доведене.

У випадку трьох множників доведення твердження теореми випливає із доведення для двох множників та рівностей:

$$\lim(x \cdot y \cdot z) = \lim \left[(x \cdot y) \cdot z\right] = \lim(x \cdot y) \cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z$$

Аналогічно доводиться твердження теореми для будь якої кількості множників.

Наслідок 1. *Постійний множник можна виносити за знак границі, тобто*:

$$\lim Cx = \lim C \cdot \lim x = C \lim x$$

Наслідок 2. *Границя цілого додатного степеня змінної величини дорівнює тому ж степеню границі цієї змінної величини, тобто*

$$\lim(x^n) = (\lim x)^n$$

Теорема 4. ***Границя частки від ділення двох змінних величин дорівнює частці від ділення їх границь, якщо тільки границя дільника не дорівнює нулю, тобто***

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \ \lim y \neq 0.$$

Доведення. Нехай $\lim x = a$,. $\lim y = b$ Тоді $x = a + \alpha, y = b + \beta,$ де α та β - нескінченно малі величини.

Розглянемо різницю

$$\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{ab+\alpha b-ab+a\beta}{b^2+\beta b}=\frac{\alpha b-a\beta}{b^2+\beta b}$$

Величина $a\beta,\ \alpha b,\ \beta b$ - нескінченно малі, тому чисельник правої частини є нескінченно малою величиною, а знаменник – скінченною величиною. Отже, дріб $\frac{\alpha b-a\beta}{b^2+\beta b}$ буде нескінченно малою величиною, яку позначимо через γ.

Тепер маємо: $\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\gamma$ або $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}+\gamma$

Знайдемо границю обох частин останньої рівності:

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{\lim x}{\lim y}.$$

що і треба було довести.

Розпишемо деякі особливі випадки обчислення границі частки $\frac{y}{z}$.

1. Якщо $\lim z=\infty$, а y – обмежена величина, тоді

$$\lim\frac{y}{z}=\lim\left(y\cdot\frac{1}{z}\right)=\lim y\cdot\lim\frac{1}{z}=M\cdot 0=0$$

Наприклад $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=0.$

2. Якщо $\lim y\neq 0,$ а $\lim z=0,$ тоді

$$\lim\frac{y}{z}=\lim\left(y\cdot\frac{1}{z}\right)=\lim y\cdot\lim\frac{1}{z}=\infty$$

тому, що $\frac{1}{z}$ - нескінченно велика величина.

Наприклад $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-1}=\infty.$

§ 5.11 Чудові границі.

Перша чудова границя

При знаходженні границі виразів, що містять тригонометричні функції, часто використовують границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{5.11}$$

яку називають ***першою чудовою границею.***

Для доведення рівності (1) побудуємо коло одиничного радіуса та кут АОВ= x (радіан), де $0<x<\frac{\pi}{2}$ (Рис. 5.7)

Побудуємо лінію синуса BC та лінію тангенса AD. Із Рис. 5.7 видно, що площа ΔAOB менше площі сектора AOB, а остання менше площі ΔAOD.

Площа ΔAOB дорівнює $\frac{1}{2}\sin x$, а площа ΔAOD дорівнює $\frac{1}{2}tgx$. Отже, маємо нерівності $\sin x < x < tgx.$

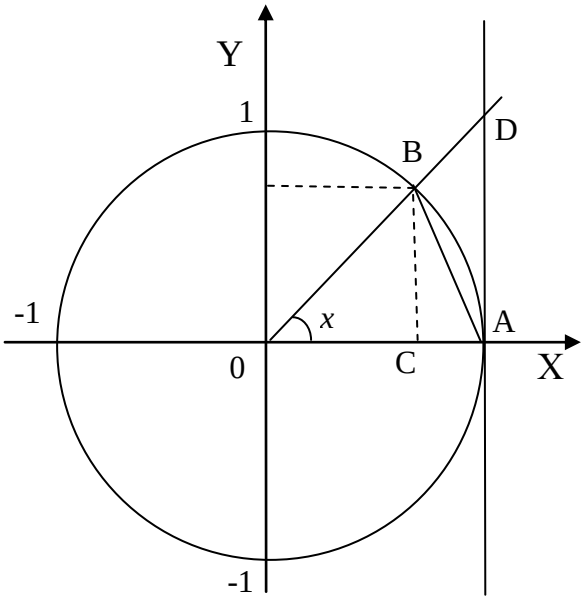


Рис. 5.7

При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ маємо $\sin x > 0$, тому нерівності можна поділити на $\sin x$. Одержимо $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Для обернених величин можна записати такі нерівності

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (5.12)$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, то за першою ознакою існування границі змінної величини із нерівностей (5.12) одержимо

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отже, рівність (5.11) доведена для $x > 0$. При $x < 0$ позначимо $x = -t,\ t > 0$, тоді

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t}.$$

Тому, для $x < 0$ маємо $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t>0}} \frac{\sin t}{t} = 1.$ (5.13)

що і треба було довести .

Наприклад.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5.$$

Друга чудова границя

Розглянемо послідовність $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, та знайдемо декілька її значень

$u_1 = 2,\ u_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$ $\qquad$ $u_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}37$

$$u_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2{,}441 \qquad u_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = 2{,}488.....$$

Для членів послідовності виконується умова $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5$. Можна довести, що для будь-якого ***n*** має місце нерівність $u_n < u_{n+1}$ яка означає, що змінна u_n монотонно зростає. В той же час усі підраховані значення u_n задовольняють нерівність $u_n < 3$. Можна показати, що ця нерівність має місце для усіх значень ***n.*** Отже, змінна u_n монотонно зростає і залишається обмеженою зверху числом 3. Згідно другої ознаки існування границі змінної величини робимо висновок, що змінна u_n має скінченну границю, яку позначають буквою e (Л.Ейлер).

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{5.14}$$

Оскільки для будь-яких значень $n > 1$ мають місце нерівності $2 < u_n < 3$, тому число ***e*** задовольняє нерівностями $2 < e < 3$.

Число ***e*** – ірраціональне (Ш. Ерміт довів, що воно – трансцендентне), воно часто використовується в математиці та економіці і наближено дорівнює ***e ≈ 2,718281828459045… .***

З числом e пов'язані функції $y = e^x$ (експоненціальна функція, або експонента) та $y = \ln x$ (логарифмічна функція з основою e - натуральний логарифм числа x, або неперовський логарифм – на честь Дж. Непера – шотландського математика)

Рівністю (5.14) ми визначили число ***e*** при $n \to \infty$, коли n приймає лише цілі та додатні значення. Можна довести таке твердження:

*Якщо змінна $x \to \infty$, приймаючи будь-які дійсні (раціональні та ірраціональні) додатні значення, то функція $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ має своєю границею також число **e,** тобто*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{5.15}$$

Якщо в лівій частині рівності (5.15) зробити заміну $\frac{1}{x} = \alpha$ то ця рівність прийме вигляд

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e \tag{5.16}$$

Рівності (5.15) та (5.16) називають ***другою чудовою границею.*** Цю границю часто використовують в різних галузях техніки, економіки.

Приклад . Обчислити $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^x$ при постійному m.

Розв'язання. Будемо використовувати другу чудову границю.
Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}\right]^{m}=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}\right\}^{m}=e^{m}$$

§ 5.12 Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих .

Ділення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин не визначено тому, що їх відношення може бути нескінченно малою або нескінченно великою або постійною величиною.

Дійсно, нехай α - нескінченно мала величина, тоді $\beta=\alpha^2$, $\gamma=3\alpha$ також нескінченно малі величини.

Маємо:
$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$ - нескінченно мала величина,

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}$ - нескінченно велика величина,

$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha}=3$ - постійна величина.

Використовуючи ділення, можна порівнювати нескінченно малі та нескінченно великі величини.

Означення: *Нескінченно малі величини* α *та* β *називаються* ***нескінченно малими одного порядку малості****, якщо їх відношення має скінчену границю, відмінну від нуля, тобто якщо* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\neq 0$.

Якщо $k=1$, то α *та* β називаються ***еквівалентними*** нескінченно малими величинами. Еквівалентні величини позначаються так:

$$\alpha(x)\sim\beta(x)$$

Приклади нескінченно малих ***еквівалентних*** величин:

$\sin\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0;$ $\qquad tg\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0;$

$1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2},\ \alpha\to 0;$

$\arcsin\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0;$ $\qquad arctg\,\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0;$

$$e^{\alpha}-1\sim\alpha,\ \alpha\to 0; \qquad a^{\alpha}-1\sim\alpha\cdot\ln a,\ \alpha\to 0;$$

$$(1+\alpha)^{k}-1\sim k\alpha,\quad \alpha\to 0,\quad k>0;$$

$$\log_a(1+\alpha)\sim\alpha\cdot\log_a e,\quad \alpha\to 0;$$

Означення: *Якщо відношення двох нескінченно малих величин є нескінченно мала величина, тобто* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, *то* α *називають нескінченно малою величиною вищого порядку малості в порівнянні з* β.

Наприклад, якщо $\alpha=\beta^3$, то $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\beta^3}{\beta}=\lim\beta^2=0.$

Нескінченно великі величини порівнюють таким же чином.

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають розкриттям невизначеності їх відношення.

РОЗДІЛ 6 Диференціальне числення функції однієї змінної

§ 6.1 Деякі задачі, що приводять до поняття похідної

а) Задача про швидкість прямолінійного руху

Нехай тіло рухається прямолінійно вздовж осі *Os*, але нерівномірно. Тоді координата s точки буде змінюватись з часом за деяким законом, тобто *s=s(t).* Починаючи з деякого моменту *t* за час Δt тіло пройде шлях

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Середня швидкість v_c руху за проміжок Δt буде $v_c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Середня швидкість дає лише наближене уявлення про рух в окремі моменти часу. Так на початку проміжку Δt тіло могло рухатись прискорено, а в кінці цього проміжку часу – уповільнено.

Коли проміжок часу Δt зменшується, тоді v_c наближається до швидкості руху в момент *t,* що відповідає початку проміжку Δt.

Означення: ***Миттєвою швидкістю v (або швидкістю в момент t)*** *називають границю відношення приросту шляху* Δs *до приросту часу* Δt, *коли* $\Delta t \to 0$, *тобто*

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (6.1)$$

Миттєва швидкість v залежить від часу *t,* а також від вигляду функції *s=s(t).*

b) Задача про дотичну до графіка функції $y = f(x)$**.**

Нехай задана функція $y = f(x)$. Графіком цієї функції на площині *xOy* буде деяка крива лінія.

Означення: ***Дотичною до кривої*** $y = f(x)$ ***в точці M(x,y)*** *називають граничне положення MD січної MN, коли точка N, рухаючись вздовж кривої, прямує до точки дотику M (Рис.6.1).*

З малюнка видно, що тангенс кута нахилу січної *MN* до осі O*x* буде

$$tg\alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Із означення дотичної випливає, що її кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha$ є

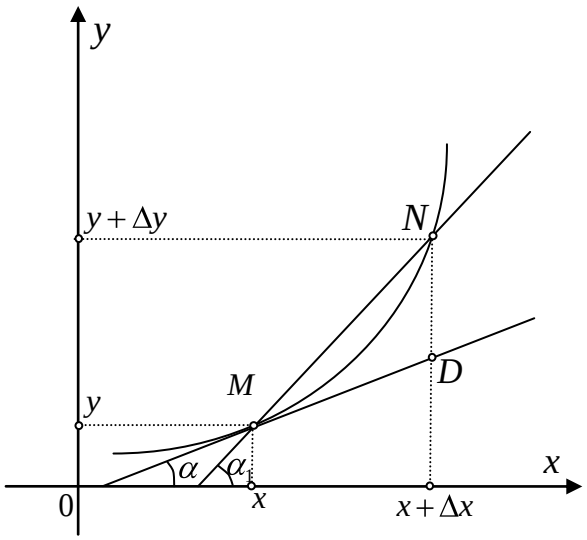


Рис. 6.1

границя, до якої прямує кутовий коефіцієнт $k_1 = tg\alpha_1$ січної при необмеженому наближенні точки *N* до *M* тобто при $\Delta x \to 0$.

Отже одержали:

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (6.2)$$

с) Задачі про маржинальні вартість, доход, прибуток.

Маржинальними витратами називають гранично можливі витрати в умовах хоча б постійного відтворення виробництва відповідної продукції. Аналогічно визначають маржинальні доход та прибуток.

Позначимо через *V(x), D(x)* та *P(x)* витрати, доходи та прибуток виробництва *x* одиниць продукції. Кожна з цих величин є певною функцією кількості одиниць *x* виробленої та проданої продукції.

Якщо підприємство збільшує випуск продукції на Δx одиниць, то ці функції одержать приріст

$$\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x);$$
$$\Delta D(x) = D(x + \Delta x) - D(x);$$
$$\Delta P(x) = P(x + \Delta x) - P(x);$$

Відношення приросту функції до Δx характеризує приріст відповідної функції на одиницю приросту продукції, а границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ стає маржинальною. Похідна

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x}. \qquad (6.3)$$

виражає граничні витрати виробництва і характеризує додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Маржинальний доход

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D(x + \Delta x) - D(x)}{\Delta x}. \qquad (6.4)$$

Маржинальний прибуток

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}. \qquad (6.5)$$

Аналогічним чином можуть бути визначені *гранична виручка*, *гранична продуктивність, гранична корисність* та інші граничні величини. Застосування

диференціального числення до дослідження економічних процесів на основі аналізу граничних величин дістало назву ***граничного аналізу***.

Граничні величини характеризують не стан, а процес зміни економічних параметрів об'єкта.

В економічній літературі при записі маржинальних (граничних) величин до звичайних позначень добавляють букву M, а при записі середніх величин добавляють букву A. Наприклад, MD - граничний доход, AD - середній доход.

Розглядаючи різні задачі, ми одержимо формули (6.1) – (6.5) для їх розв'язків, а саме, шукану величину знаходять шляхом застосування граничного переходу у відношенні приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

§ 6.2 Означення похідної та деякі її інтерпретації

Означення: ***Похідною функції*** $y = f(x)$ по *аргументу x називають границю відношення приросту функції* Δy *до приросту аргументу* Δx, *коли* Δx *прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то її позначають через* $f'(x)$ *або* y', *або* $\frac{dy}{dx}$, *або* $\frac{df(x)}{dx}$. *Отже математично похідна функції визначається за формулою*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (6.6)$$

Відмітимо, що похідну $f'(x)$ одержали за допомогою граничного переходу при довільному *x,* тому при $x=a$ вона приймає конкретне значення, яке позначають $f'(a)$ або $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

Операцію знаходження похідної функції $y = f(x)$ *називають диференціюванням цієї функції в точці x. Функцію* $f(x)$, *яка має похідну в точці x, називають диференційованою в точці x. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою на всьому проміжку.*

Повертаючись до розглянутих вище задач, які привели до поняття похідної, можна зробити такі висновки:

1) **механічний зміст похідної:** похідна $S'(t)$ є величиною миттєвої швидкості тіла, що рухається за законом $S=S(t)$;

2) **геометричний зміст похідної:** похідна $f'(x)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою *x;*

3) **економічний зміст похідної:** похідні $V'(x)$, $D'(x)$, $P'(x)$ дорівнюють маржинальній вартості , доходу та прибутку відповідно.

§ 6.3 Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функцій

Теорема. ***Якщо функція*** $y = f(x)$ ***диференційована в деякій точці*** x_0 **,** ***то вона в цій точці неперервна.***

Доведення. Якщо $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 **,** то згідно з означенням похідної при $x = x_0$ існує скінчена границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

В силу того, що границя змінної величини відрізняється від самої змінної лише на нескінченно малу α, то з останньої рівності маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x \qquad (6.7)$$

Оскільки $f'(x_0)$ - постійна величина, то з властивостей нескінченно малих випливає, що обидва доданки в правій частині (6.7) є нескінченно малими величинами. Із (6.7) випливає, що $\Delta y \to 0$, тобто функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0. Теорема доведена.

Наслідок. *З теореми випливає, що неперервність функції є необхідною умовою диференційованості функції. Це означає, що в точках розриву функція не має похідних, тобто вона не диференційована.*

Функція, яка неперервна в точці x_0 може бути не диференційованою в цій точці. Наприклад, $y = |x|$ неперервна в точці x=0, але не має похідної в цій точці тому, що

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \text{ а } \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

Тобто границя $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від способу прямування $\Delta x \to 0$.

§ 6.4 Означення диференціала функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в інтервалі $(a; b)$, $x \in (a, b)$. Згідно з означенням похідної функції $y = f(x)$ маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу α, тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x. \qquad (6.8)$$

Функція диференційована в точці *x*, тому вона неперервна в цій точці, але тоді при $\Delta x \to 0$ величини $\Delta y,\ f'(x)\Delta x$ та $\alpha \cdot \Delta x$ будуть нескінченно малими. Порядок малості цих трьох величин різний: $f'(x)\Delta x$ та Δy мають однаковий порядок малості, а величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою вищого

порядку малості. Отже при $f'(x) \neq 0$ перший додаток у правій частині рівності (6.8) є головною частиною приросту функції. Він є лінійним відносно Δx.

Означення: *Головну лінійну частину приросту функції називають диференціалом цієї функції. Диференціал функції* $y = f(x)$ *позначають dy або df(x).*

Таким чином,

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Для знаходження диференціала функції $y = f(x)$, що має похідну в точці *x*, треба помножити значення цієї похідної на приріст аргументу Δx або на $dx(\Delta x = dx)$

З рівності $$dy = f'(x)dx \qquad (6.9)$$

Одержимо

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

тобто похідна функції дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала незалежної змінної. Диференціали часто застосовують для знаходження наближених значень функції.

§ 6.5 Знаходження похідних першого порядку. Основні правила диференціювання

Правила сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. ***Похідна постійної величини C дорівнює нулю, тобто*** $C' = 0$**.**

Доведення. Дійсно, нехай $y = C$, тоді $\Delta y = 0$ для будь-якого Δx, в тому числі і при $\Delta x \to 0$. Згідно з означенням похідної

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Що і треба було довести.

Теорема 2. ***Якщо кожна із функцій*** $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ***(n - скінчене число) диференційована в деякій точці x. то їх алгебраїчна сума також є диференційованою в цій точці, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі їх похідних, тобто***

$$\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x). \qquad (6.10)$$

Доведення. Нехай $y = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)$ і аргумент *x* одержує приріст Δx. Тоді

$$\Delta y = \left[f_1(x+\Delta x) \pm f_2(x+\Delta x) \pm \ldots \pm f_n(x+\Delta x) \right] - \left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right] =$$
$$= \Delta f_1 + \Delta f_2 + \ldots + \Delta f_n$$

Згідно з властивостями границі і з тим, що існують похідні функції $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta x} + \ldots + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_n}{\Delta x}$$

Підставивши значення y, одержуємо

$$\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \right]' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

Що і треба було довести.

Аналогічно можна довести наступні теореми.

Теорема 3. *Якщо кожна з функцій* $u(x)$ *та* $v(x)$ *диференційована в точці* x, *то добуток цих функцій також має похідну в точці* x, *причому цю похідну знаходять за формулою*

$$\left[u(x) \cdot v(x) \right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x). \qquad (6.11)$$

Теорема 4. *Якщо* $u(x)$ *та* $v(x)$ *мають похідні в точці* x *і* $v(x) \neq 0$, *то частка цих функцій також має похідну в точці* x, *яку знаходять за формулою*

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \qquad (6.12)$$

Теорема 6. *Якщо* $y = f(u)$, $u = u(x)$ *і функції* f *та* u *диференційовані функції своїх аргументів, то існує похідна по* x *складної функції* y, *причому вона дорівнює добутку похідної функції* y *по проміжному аргументу* u *та похідної функції* u *та аргументу* x, *тобто*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (6.13)$$

§ 6.6 Диференціювання неявно заданих функцій

Якщо функціональна залежність між y та x задана неявно, тобто рівністю $F(x, y) = 0$, тоді для знаходження похідної по x функції y треба продиференціювати тотожність $F(x, y) = 0$, враховуючи, що y залежить від x, а потім розв'язати рівняння, яке одержали, відносно y'.

Приклад. Знайти y', якщо $5y^3 - 2ax^2 + y^2 x = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо задане рівняння по x:

$$15y^2 \cdot y' - 4ax + 2yy'x + y^2 = 0 \Rightarrow (5y^2 + 2yx) \cdot y' = 4ax - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4ax - y^2}{15y^2 + 2yx}.$$

§ 6.7 Похідні основних елементарних функцій

Теорема 1. Якщо $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ *то* $y' = \frac{1}{x} \log_a e.$

Доведення. Нехай x довільна точка із ОДЗ $x > 0$. Візьмемо приріст аргументу Δx і знайдемо відповідний приріст функції

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a (x) = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Звідси за допомогою граничного переходу, використовуючи другу чудову границю, одержимо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] = \frac{1}{x} \log_a e$$

Наслідок. *При a=e, маємо: якщо* $y = \ln x$ *то* $y' = \frac{1}{x}$.

Теорема 2. *Якщо* $y = x^\alpha$, *де* α *- довільне дійсне число, то* $y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

Доведення. Функція $y = x^\alpha$ визначена для довільних α лише для $x > 0$, тому вона додатна і її можна про логарифмувати. Маємо $\ln y = \alpha \ln x.$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, одержимо

$$(\ln y)' = (\alpha \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha \cdot y \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \quad y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

Що і треба було довести.

Теорема 3. *Якщо* $y=a^x$ $(a>0;\ a\neq 1)$, *то* $y'=a^x\cdot\ln a$

Доведення. Прологарифмуємо функцію $y=a^x$

$$y=a^x \ \Rightarrow\ \ln y=x\ln a \ \Rightarrow\ (\ln y)'=(x\ln a)' \ \Rightarrow\ \frac{y'}{y}=\ln a \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y'=y\ln a \ \Rightarrow\ y'=a^x\ln a$$

Наслідок. *Якщо* $y=e^x, \quad mo \quad y'=e^x.$

Теорема 4. *Якщо* $y=\sin x, \quad mo \quad y'=\cos x$

Якщо $w=\cos x, \quad mo \quad w'=-\sin x$

Доведення. Доведення проведемо, використовуючи означення похідної. Надамо змінній *x* приріст Δx ,тоді приростом функції буде

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\Delta w=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Використовуючи першу чудову границю і властивості неперервних функцій, одержимо

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\cos x;$$

$$w'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\right]=-\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=-\sin x.$$

Що і треба було довести.

Теорема 5. *Якщо* $u=tgx, \quad v=ctgx$, *то*

$$u'=\frac{1}{\cos^2 x},\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n; \quad v'=-\frac{1}{\sin^2 x},\ \ x\neq\pi n$$

Доведення. Маємо $u=tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}; \quad v=ctgx=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

Використовуючи правило диференціювання частки двох функцій, похідні від яких існують, одержимо

$$u'=(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$v' = (tgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Що і треба було довести.

§ 6.8 Диференціювання функцій, що задані параметрично

Нехай залежність y від x задана параметрично у вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{6.14}$$

Де *t* – параметр.

При зміні *t* змінюється *x* та *y*, а точка з координатами *(x;y)*, рухаючись по площині, утворює лінію, яка є графіком залежності *y* від *x*.

Якщо t одержить приріст Δt, то *x* та *y* одержать відповідні прирости

$$\Delta x = \varphi(\Delta t + t) - \varphi(t), \quad \Delta y = \psi(\Delta t + t) - \psi(t),$$

Причому при $\Delta t \to 0, \quad \Delta x \to 0$ *та* $\Delta y \to 0.$ Тому

$$y_x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Отже

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} \tag{6.15}$$

Приклад. Знайти y_x', якщо $\begin{cases} x = a\sin 3t \\ y = a\cos 3t \end{cases}$.

Розв'язання. Знайдемо y_t' і x_t':

$y_t' = (a\cos 3t)_t' = -3a\sin 3t; \quad x_t' = (a\sin 3t)_t' = 3a\cos 3t.$ Отже

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{-3a\sin 3t}{3a\cos 3t} = -tg3t$$

§ 6.9 Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій

Нехай задана функція $y = f(x)$ таким чином, що одному значенню x ставиться у відповідність одне значення y, і різним значення аргументу відповідають різні значення функції. Тоді кожному значенню y відповідатиме єдине значення x, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$. Ця функція називається *оберненою* до даної. На даному етапі графіки цих функцій співпадають. Якщо, як звичайно, аргумент позначити через x, а функцію – через y, то замість функції $x = \varphi(y)$ будемо мати функцію $y = \varphi(x)$, *графік якої буде симетричний* до графіка функції $y = f(x)$ відносно прямої $y = x$

Сформулюємо без доведення теорему про зв'язок між похідними цих функцій.

Теорема 6. *Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(y)$, причому*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{6.16}$$

Теорема 7. *Похідні від обернених тригонометричних функцій знаходяться за формулами:*

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2} \\ (arcctgx)' &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Доведемо першу формулу. Функція $y = \arcsin x$ є оберненою до функції

$x = \sin y$, $y \in \left[-0{,}5\pi; 0{,}5\pi\right]$. Оскільки на вказаному проміжку функція зростає, то похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0$. Тоді з (6.16) маємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \Rightarrow y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знайдемо похідну від $y = arctgx$. Функція $y = arctgx$ є оберненою до функції $x = tgy$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (-\infty; \infty)$. Оскільки на інтервалі $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функції $x = tgy$ зростає і $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y$.

Звідки можна отримати $y'_x = (arctgx)' = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \langle tgy = x \rangle = \frac{1}{1+x^2}$.

§ 6.10 Логарифмічне диференціювання

Логарифмічна похідна використовується при знаходженні похідної від степенево-показникової функції $y = f(x)^{\varphi(x)}$ та при знаходженні похідної функції, яка є добутком або часткою більше, ніж двох функцій.

Якщо $f(x) = u,\ \varphi(x) = v$, то

$$y'_x = \left(u^v\right)' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'. \qquad (6.18)$$

Приклад. Знайти y', якщо: а) $y = x^{\cos 3x}$; б) $y = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$.

Розв'язання. а) Прологарифмуємо обидві частини рівняння, що задає функцію:

$$\ln y = \ln x^{\cos 3x},\ \ln y = \cos 3x \ln x.$$

Диференціюємо обидві частини рівняння: $\frac{1}{y} y' = -3\sin 3x \ln x + \cos 3x \cdot \frac{1}{x}$, звідки

$$y' = y\left(-3\sin 3x \ln x + \frac{\cos 3x}{x}\right).$$

Підставляючи в цей вираз y, маємо: $y' = x^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x \ln x + \frac{\cos 3x}{x}\right)$.

б) $y = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln y = 3\ln x + \ln(x^2+1) + x - \ln(x-1) - 0{,}5\ln(3x+5)$.

Знаходимо похідну, як від неявно заданої функції

$$\frac{1}{y}y' = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)};$$

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)}\right).$$

Усі правила та одержані формули знаходження похідних доцільно записати у вигляді таблиці і добре запам'ятати тому, що вони часто використовуються.

§ 6.11 Правила та формули для обчислення похідних

1. *Якщо* $y = C$, *де* C - *стала величина, то* $y' = 0$ *або* $(C)' = 0$
2. $[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \ldots \pm f_n'(x).$
3. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
4. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
5. *Якщо* $y = f(u)$ *і* $u = u(x)$, *то* $y'_x = f'_u \cdot u'_x$
6. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{u-1} \cdot u'$
7. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
9. $(\log_a u)' = \frac{1}{u} \cdot \log_a e \cdot u' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
11. $(\sin u)' = (\cos u) \cdot u' = u' \cdot \cos u$
12. $(\cos u)' = (-\sin u) \cdot u' = -u' \cdot \sin u$
13. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
14. $(ctgu)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$

15. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

16. $(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

18. $(arcctgu)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

§6.12 Похідні і диференціали вищих порядків

Похідні порядку вище першого називаються *похідними вищих порядків. Похідною другого порядку* (другою похідною) функції $y = f(x)$ називається похідна від її похідної першого порядку. Позначення: y''; $f''(x)$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$; y''_{xx}.

Аналогічно похідна *третього порядку* функції $y = f(x)$ - це похідна від похідної другого порядку: $y''' = (y'')'$ і т.п.

Похідною *n – го порядку* від функції $y = f(x)$ називається похідна від похідної *(n* - 1) *– го* порядку: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Якщо функція задана неявно, то диференціюють задане рівняння по x і розв'язують його відносно y'. Щоб знайти другу похідну, диференціюють по x знайдену першу похідну і в одержане співвідношення підставляють значення похідної першого порядку. Продовжуючи цей процес, можна знайти одну за одною послідовно похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x і саму функцію y.

Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

то похідні вищих порядків знаходяться за алгоритмом:

- якщо будуть виконуватись всі умови відносно функцій $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, то похідна першого порядку знаходиться за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$
- друга похідна $y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \dfrac{d}{dx}\left(y'_x\right) = \dfrac{d\left(y'_x\right)}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d\left(y'_x\right)}{dt} \cdot \dfrac{1}{x'_t}$
- похідні вищих порядків $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)' \cdot \dfrac{1}{x'_t}$

Приклад. Знайти $y', y'', y^{(4)}$ якщо $y = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4$.

Розв 'язання. $y' = 8x^3 - 9x^2 + 4x$, $y'' = 24x^2 - 18x + 4$, $y''' = 48x - 18$, $y^{(4)} = 48$.

Приклад. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

Розв'язання.
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(a \cdot \sin^3 t)'_t}{(a \cdot \cos^3 t)'_t} = \frac{3a\sin^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -tgt$$

$$y''_{xx} = \frac{(-tgt)'_t}{(a \cdot \cos^3 t)'_t} = \frac{1}{3a\sin t \cdot \cos^4 t}$$

Диференціалом, другого порядку функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку: $d^2y = d(dy)$. Аналогічно визначається і диференціал третього порядку: $d^3y = d(d^2y)$.

Диференціал n – го порядку: $d^n y = d(d^{n-1}y)$. Якщо $y = f(x)$ і x - незалежна змінна, то диференціали вищих порядків обчислюються за формулами:

$$d^2y = y''(dx)^2; \quad d^3y = y'''(dx)^3; \; d^n y = y^{(n)}(dx)^n$$

Приклад. Знайти диференціал першого, другого та третього порядків функції $y = (2x-3)^3$.

Розв'язання. $dy = 3(2x-3)^2 2dx = 6(2x-3)^2 dx$;
$d^2y = 12(2x-3)2(dx)^2 = 24(2x-3)dx^2$;
$d^3y = 24 \cdot 2dx^3 = 48dx^3$.

§ 6.13 Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. *Якщо диференційована на деякому інтервалі* $(a\,;b)$ *функція* $y = f(x)$ *досягає найбільшого (або найменшого) значення у внутрішній точці* τ *інтервалі* $(a\,;b)$, *то похідна функції в цій точці дорівнює нулю , тобто* $f'(\tau) = 0$.

Доведення: Нехай функція $y = f(x)$ набуває найбільшого значення в точці $x = \tau \in (a\,;b)$. Тобто $f(x) \le f(\tau),\ x \in (a\,;b)$. (Рис.6.2)

Оскільки точка τ є внутрішньою точкою інтервалу $(a\,;b)$, то приріст Δx може бути як додатнім, так і від'ємним, а відповідний приріст функції – тільки не додатнім $f(\tau+\Delta x)-f(\tau)\le 0$

При $\Delta x>0$ маємо

$$\frac{f(\tau+\Delta x)-f(\tau)}{\Delta x}<0\text{, тому}\qquad f'_{+}(\tau)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{f(\tau+\Delta x)-f(\tau)}{\Delta x}\le 0$$

Аналогічно, при $\Delta x<0$ маємо $f'_{-}(\tau)\ge 0$. За умовою похідна існує, тобто

$$f'_{+}(\tau)=f'_{-}(\tau)=f'(\tau) \qquad (6.19)$$

З рівності (6.19) за умов $f'_{+}(\tau)\le 0$ і $f'_{-}(\tau)\ge 0$ випливає, що $f'(\tau)=0$.

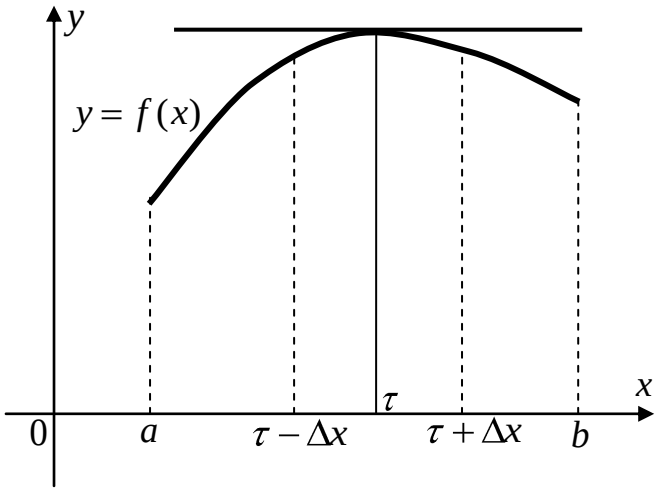


Рис.6.2

Геометричний зміст теореми Ферма зрозумілий з Рис.6.2: якщо в точці $x=\tau$ функція $y=f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка функції в точці $(\tau\,;f(\tau))$ паралельна до осі $0x$.

Теорема Ролля. *Якщо функція* $y=f(x)$ *:*

1. *неперервна на відрізку* $[a\,;b]$;
2. *диференційована в інтервалі* $(a\,;b)$;
3. *на кінцях відрізка набуває однакових значень* $f(a)=f(b)$, *то знайдеться хоча б одна внутрішня точка* $x=c$, *в якій* $f'(c)=0$.

Доведення: Функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a\,;b]$, тому вона досягає на ньому свого найбільшого $f(c_2)=M$ і найменшого значення $f(c_1)=m$. Якщо $M=m$, то $f(x)=const$ і $f'(x)=0$ в будь якій точці $[a\,;b]$.

Якщо $M\ne m$ (Рис.6.3), то тоді хоча б одне із значень досягається у внутрішній точці інтервалу $(a\,;b)$, тому що $f(a)=f(b)$. За теоремо Ферма похідна в такій точці дорівнює нулю.

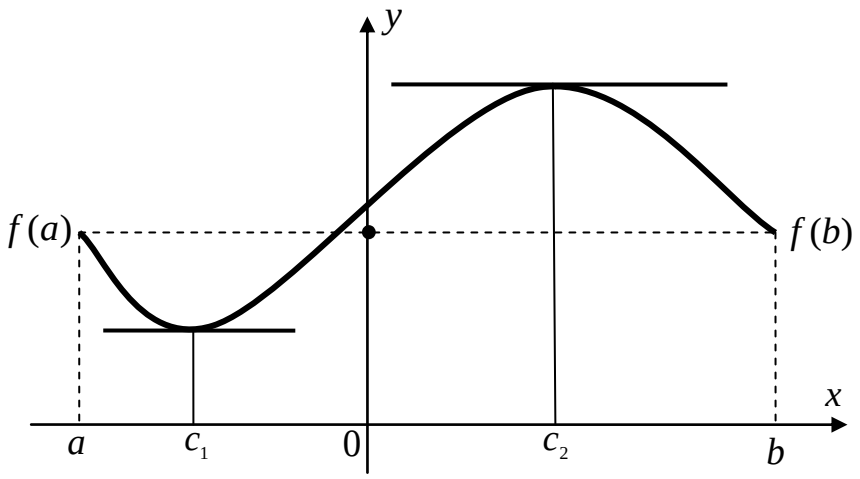


Рис.6.3

Теорема Лагранжа. *Якщо функція* $y = f(x)$ *:*

1. неперервна на відрізку $[a;b]$*;*

2. диференційована в інтервалі $(a;b)$,

то знайдеться хоча б одна внутрішня точка інтервалу $x = c \in (a;b)$*, в якій*

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c). \qquad (6.20)$$

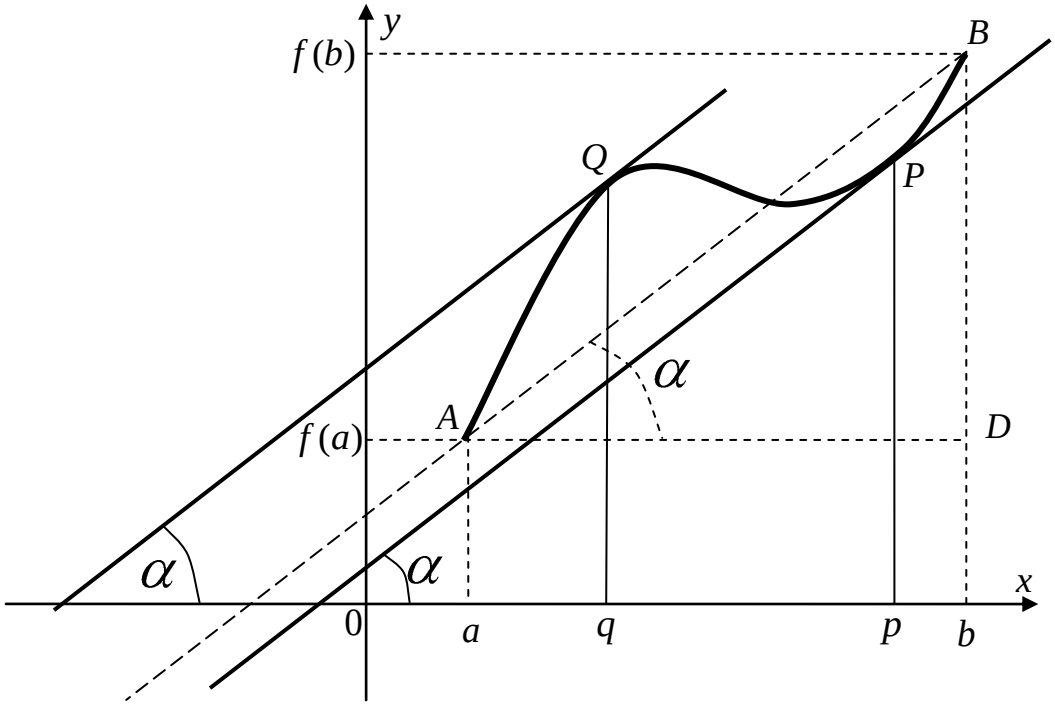


Рис.6.4

Запишемо формулу теореми Лагранжа у вигляді $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(c)$. З Рис.6.4 бачимо, що величина $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$ в ΔABD є тангенсом кута нахилу хорди, що з'єднує т. $A(a;\ f(a))$ з т. $B(b\,;\ f(b))$ через які проходить графік функції $y = f(x)$. Теорема Лагранжа говорить, що при

виконані умов теореми на графіку функції $y=f(x)$ завжди знайдеться хоча б одна внутрішня точка дотична в якій буде паралельна хорді AB. На Рис. 6.4 дотичні в точках $Q(q\,;\,f(q))$ і $P(p\,;\,f(p))$ теж утворюють кут α з віссю $0x$.

Формулу (6.20) називають *формулою Лагранжа, або формулою скінченних приростів.*

Теорема Коші. *Якщо функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *:*

1. *неперервні на відрізку* $[a\,;b]$;
2. *диференційовані в інтервалі* $(a\,;b)$, *причому* $\varphi'(x)\neq 0,\ x\in(a\,;b)$,

то існує така точка інтервалу $x=c\in(a\,;b)$, *в якій*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{6.21}$$

Доведення: Введемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)],$$

яку можна розглядати на відрізку $[a\,;b]$, бо $\varphi(a)\neq\varphi(b)$. В противному разі за теоремою Ролля знайшлася б внутрішня точка в якій $\varphi'=0$, що суперечить умові $\forall x\in(a\,;b):\varphi'\neq 0$.

Функція $F(x)$ задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому знайдеться точка $x=c\in(a\,;b)$, в якій $F'(c)=0$. Отже

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)\ \Rightarrow\ F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(c)=0\ \Rightarrow\ f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0\ \Rightarrow\ \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

§ 6.14 Приклади з економічним змістом

Приклад. Для функції витрат підприємства (у гривнях)

$$V(x)=0{,}004x^3-0{,}36x^2+60x+800$$

знайти маржинальну вартість як функцію x та обчислити маржинальну вартість, коли вироблено $x_1=10$, $x_2=30$, та $x_3=50$ одиниць продукції.

Розв'язання. Для знаходження маржинальної вартості треба знайти похідну функції витрат, тобто

$$V'(x)=(0{,}004x^3-0{,}36x^2+60x+800)'=0{,}012x^2-0{,}72x+60$$

Одержали функцію маржинальної вартості для довільної кількості x виготовлених одиниць продукції, коли приріст x зростає на достатньо малу величину.

При $x_1=10$ одержимо

$$V'(10) = 0{,}012 \cdot 10^2 - 0{,}72 \cdot 10 + 60 = 54$$

При $x_2 = 30$ маємо

$$V'(30) = 0{,}012 \cdot 30^2 - 0{,}72 \cdot 30 + 60 = 42$$

При $x_3 = 50$ тоді

$$V'(50) = 0{,}012 \cdot 50^2 - 0{,}72 \cdot 50 + 60 = 54$$

Отже можна сказати, що вартість виготовлення 11-ої та 51-ої одиниць продукції буде 54 гривень; 31-ої одиниці продукції - 42 гривень.

Приклад. Нехай функції витрат виробництва *x* одиниць продукції (у гривнях) має вигляд $V(x) = 1200 + 5x + 0{,}05x^2$. Знайти маржинальну вартість та середню вартість виробництва одного виробу підприємства.

Розв'язання. Маржинальна вартість виробництва буде $MV = V'(x) = 5 + 0{,}1x$.

Середня вартість виготовлення одиниці продукції буде

$$AV = \frac{V(x)}{x} = \frac{1200}{x} + 5 + 0{,}05x$$

Неважко бачити , що ці величини зовсім різні.

Приклад. Визначити маржинальний доход виробництва 60 одиниць виробів, якщо кількість виготовлених виробів знаходиться за формулою x=1500-30p, де p – роздрібна вартість одного виробу.

Розв'язання. Спочатку визначимо роздрібну вартість p одиниці виробу як функцію кількості x виготовлених виробів.

Із заданої рівності

$$x = 1500 - 30p \;\Rightarrow\; 30p = 1500 - x \;\Rightarrow\; p = 50 - \frac{x}{30}.$$

Функція доходу буде $D(x) = x \cdot p = x\left(50 - \frac{x}{30}\right) = 50x - \frac{x^2}{30}$.

Для знаходження маржинального доходу при $x = 60$ треба знайти значення $D'(x)$ при $x = 60$. Шляхом диференціювання функції $D(x)$ одержимо

$$D'(x) = 50 - \frac{2x}{30}$$

Отже, маємо $D'(60) = 50 - \frac{2 \cdot 60}{30} = 46$

Приклад. Підприємство виготовляє *x* виробів, роздрібна вартість кожного з них – *p*, причому $p+0{,}1x=80$, а функція витрат $V(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти маржинальний прибуток , якщо виготовлено та продано 150 та 400 виробів.

Розв'язання. У даному випадку функцією доходу буде

$$D(x) = x \cdot p = x(80 - 0{,}1x) = 80x - 0{,}1x^2$$

Прибуток від виготовлення та продажу *x* виробів буде

$$P(x) = D(x) - V(x) = 80x - 0{,}1x^2 - (5000 - 20x) = -0{,}1x^2 + 60x - 5000.$$

Знайдемо маржинальний прибуток для довільного x

$$P'(x) = (60x - 0{,}1x^2 - 5000)' = 60 - 0{,}2x.$$

Тому для $x = 150$ та $x = 400$ одержимо:

$$P'(150) = 60 - 0{,}2 \cdot 150 = 30,$$

$$P'(400) = 60 - 0{,}2 \cdot 400 = -20.$$

Отже підприємство буде мати збитки розміром 20 гривень за кожний виріб, який буде виготовлено та продано при зростанні кількості виробів.

Приклад. ***(Прибуток та реклама)***. Мале підприємство може виготовити та продати кожну одиницю виробу з прибутком 10 гривень. Якщо підприємство витрачає x гривень на рекламу виробів, тоді кількість проданих виробів дорівнює $n = 1000(1 - e^{-0{,}001x}) - 0{,}1x$ Знайти швидкість зміни прибутку, відносно зміни витрат на рекламу при x=1000 та x=3000.

Розв'язання. Оскільки кожен виріб дає 10 гривен прибутку, тому задана кількість проданих виробів дає прибуток з урахуванням витрат на рекламу. Швидкість змін прибутку відносно зміни витрат на рекламу знайдемо шляхом диференціювання $P = 10n$:

$$P = 10n = 10000(1 - e^{-0{,}001x}) - x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P' = 10000(0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x}) - 1 = 10e^{-0{,}001x} - 1$$

При x=1000 та x=3000 маємо

$$P'(1000) = 10 \cdot e^{-1} - 1 = 10 \cdot 0{,}3679 - 1 = 2{,}679,$$

$$P'(3000) = 10 \cdot e^{-3} - 1 = 10 \cdot 0{,}0498 - 1 = -0{,}502.$$

Отже, при витратах на рекламу 3000 гривень прибутки спадають.

Приклад. Нехай валовий продукт деякої держави змінюється з часом t за формулою $\Pi = 100 + t$ (мільярдів гривень), а кількість населення змінюється за законом $P = 120 + 2t$ (мільйонів). Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

Розв'язання. Позначимо через $y(t)$ частину валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

За умовою цього прикладу

$$y(t) = \frac{\Pi}{P} = \frac{100 + t}{120 + 2t}$$ (тисяч гривень на одну особу).

Використовуючи механічний зміст похідної та правило диференціювання частки , знаходимо шукану швидкість

$$y'(t)=\frac{(100+t)'\cdot(120+2t)-(100-t)\cdot(120+2t)'}{(120+2t)^2}=$$

$$=\frac{1\cdot(120+2t)-2\cdot(100+t)}{(120+2t)^2}=\frac{120+2t-200-2t}{4(60+t)^2}=\frac{-20}{(60+t)^2}.$$

Отже частина валового продукту кожного громадянина з часом зменшується.

Приклад. Загальна вартість вироблених m одиниць деякого продукту визначається функцією $C=90000+1200m+0{,}3m^2$. Яку кількість $\tilde{m}$ потрібно випускати, щоб середня вартість одиниці продукції була мінімальною? *(Задача про мінімізацію середньої вартості одиниці продукції.)*

Розв'язання. Середня вартість одиниці продукції визначаємо діленням загальної вартості $C=90000+1200m+0{,}3m^2$ на кількість виробленої продукції m:

$$AC=\frac{90000+1200m+0{,}3m^2}{m}=\frac{90000}{m}+1200+0{,}3m.$$

Знайдемо точку мінімуму, застосовуючи похідну

$$f(m)=\frac{90000}{m}+1200+0{,}3m \;\Rightarrow\; f'(m)=\frac{-90000}{m^2}+0{,}3;$$

$$f'(m)=0 \;\Rightarrow\; \frac{-90000}{m^2}+0{,}3=0 \;\Rightarrow\; m^2=\frac{90000}{0{,}3}=300000 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; m=\sqrt{30\cdot10000}=100\sqrt{30}=100\cdot5{,}4772255=547{,}72255$$

Оскільки m - ціле число, то $\tilde{m}$=548. Безпосередньою перевіркою знаходимо що перша похідна змінює знак з «-» на «+». Отже в даній точці функція має мінімум.

$$AC_{|m=548}=\left(\frac{90000}{m}+1200+0{,}3m\right)_{|m=548}=$$

$$=\frac{90000}{548}+1200+0{,}3\cdot548=164{,}23+1200+164{,}4=1528{,}63$$

§ 6.15 Вправи

А) Табличне диференціювання:

Знайти похідні функцій

1. $y=3+x;\quad u=4-x;\quad w=x-6;\quad z=x+9;\quad v=0{,}5+x.$

2. $y=2x;\qquad u=-5x;\qquad w=0{,}5x;\qquad z=\frac{1}{3}x;\qquad v=\frac{x}{3}.$

3. $y=3x-7;\ \ u=-4x+76;\ \ w=9-8x;\ \ z=0{,}4x-1;\ \ v=0{,}4-x.$

4. $y=x^2;\ \ u=x^3;\ \ w=x^4;\ \ z=x^{-2};\ \ v=x^{0,7}.$

5. $y=7x^{-2};\ \ u=-3x^{0,3};\ \ w=5x^4;\ \ z=8x^{-2};\ \ v=-17x^{0,7}.$

6. $y=x^2-4x+5;\ \ u=-2x^3+5x;\ \ w=7x^{-4}-4x^2+8;$
$z=6x^{-2}+45x-5;\ \ v=4x^{0,7}+8x-1.$

7. $y=x(x-7);\ \ u=(5-4x)x;\ \ w=x(9-8x);\ \ z=x(0{,}4x-1);\ \ v=x(0{,}4-x).$

8. $y=(x+3)(x-7);\ \ u=(5-4x)(x-1);\ \ w=(x+5)(9-8x);$

$z=(x-0{,}5)(0{,}4x-1);\ \ v=(x+7)(0{,}4-x).$

9. $y=(6x+9)(3x-7);\ \ u=(5-4x)(9x+8);\ \ w=(5x+3)(9-8x);$

$z=(11x+4)(0{,}4x-1);\ \ v=(0{,}5x+9)(0{,}4-x).$

10. $y=\dfrac{x-4}{x+7};\ \ u=\dfrac{x+2}{8-x};\ \ w=\dfrac{6-x}{x+2};\ \ z=\dfrac{x}{9-x};\ \ v=\dfrac{7-x}{x}.$

11. $y=(7x-11)^{15};\ \ u=(5-2x)^{18};\ \ w=(3x+5)^{12};\ \ z=(1-x)^{19};\ \ v=(2+x)^{17}.$

12. $y=5^x;\ \ u=2^x;\ \ w=3^x;\ \ z=8^x;\ \ v=17^x.$

13. $y=3^{7x-6};\ \ u=6^{5x+7};\ \ w=4^{-3x+2};\ \ z=18^{-5x+1};\ \ v=7^{4x-9}.$

14. $y=e^{-x-6};\ \ u=e^{-3x+7};\ \ w=e^{8x};\ \ z=e^{6x+1};\ \ v=e^{-4x+5}.$

15. $y=\log_3 x;\ \ u=\log_7 x;\ \ w=\log_2 x;\ \ z=\log_5 x;\ \ v=\log_6 x.$

16. $y=\log_8(5x-4);\ \ u=\log_9(11x+5);\ \ w=\log_3(-9x+8);$
$z=\log_{11}(17x-3);\ \ v=\log_4(32x-24).$

17. $y=\ln(-9x-4);\ \ u=\ln(5x+5);\ \ w=\ln(17x+6);$
$z=\ln(7x-5);\ \ v=\ln(3x-4).$

18. $y=\sin 5x;\ \ u=\sin 7x;\ \ w=\sin 23x;\ \ z=\sin 4x;\ \ v=\sin 8x.$

19. $y=\cos 6x;\ \ u=\cos 9x;\ \ w=\cos 3x;\ \ z=\cos 8x;\ \ v=\cos 4x.$

20. $y=tg9x;\ \ u=tg11x;\ \ w=tg5x;\ \ z=tg7x;\ \ v=tg17x.$

21. $y=ctg11x;\ \ u=ctg3x;\ \ w=ctg7x;\ \ z=ctg9x;\ \ v=ctg2x.$

22. $y=\arcsin 3x;\ \ u=\arcsin 5x;\ \ w=\arcsin 13x;$
$z=\arcsin 11x;\ \ v=\arcsin 7x.$

23. $y=\arccos(-8x);\ \ u=\arccos(-2x);\ \ w=\arccos(-15x);$
$z=\arccos(-4x);\ \ v=\arccos(-12x).$

24. $y = arctg(-8x);\quad u = arctg(-3x);\quad w = arctg(-4x);$
$z = arctg(-5x);\quad v = arctg(-6x).$

25. $y = arcctg(-11x);\quad u = arcctg(-10x);\quad w = arcctg(-9x);$
$z = arcctg(-8x);\quad v = arcctg(-7x).$

Б) Знайти похідні першого порядку заданих функцій:

1. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{7}};\quad u = \frac{1}{\sqrt[3]{24}};\quad w = \frac{1}{\sqrt[5]{17}};\quad z = \frac{1}{\sqrt[7]{61}};\quad v = \frac{1}{\sqrt[6]{24}}.$

2. $y = \frac{-7x-4}{5};\quad u = \frac{-3x+2}{8};\quad w = \frac{6-5x}{2};\quad z = \frac{-9x+21}{12};\quad v = \frac{8-6x}{11}.$

3. $y = \frac{5}{(-3x+5)^2};\quad u = \frac{7}{(-8x-6)^3};\quad w = \frac{9}{(-4x+7)^4};$
$z = \frac{11}{(-7x+12)^5};\quad v = \frac{14}{(-9x+15)^{26}}.$

4. $y = \frac{2}{\sqrt[3]{-7x+6}};\quad u = \frac{4}{\sqrt[4]{-2x+5}};\quad w = \frac{6}{\sqrt[5]{x+9}};$
$z = \frac{8}{\sqrt[6]{-8x+7}};\quad v = \frac{10}{\sqrt[7]{-3x+4}}.$

5. $y = \frac{3x^{0,4}}{\sqrt[4]{x}};\quad u = \frac{5x^{0,6}}{\sqrt[8]{x}};\quad w = \frac{7x^{0,2}}{\sqrt[3]{x}};$
$z = \frac{4x^{0,5}}{\sqrt[6]{x^5}};\quad v = \frac{8x^{0,7}}{\sqrt[10]{x^3}}.$

6. $y = \frac{1}{5^{7x^2-9x-1}};\quad u = \frac{1}{2^{3x^2-7x-11}};\quad w = \frac{1}{3^{5x^2-8x+1}};$
$z = \frac{1}{8^{4x^2+3x-1}};\quad v = \frac{1}{7^{-7x^2+8x+5}}.$

7. $y = \log_3(5x^3-4x^2+8x-11);\quad u = \log_2(-x^3+5x^2+8x-1);$
$w = \log_5(-3x^3+6x^2-7x-15);\quad z = \log_{11}(9x^3-4x^2+7x-12);$
$v = \log_4(-5x^3+3x^2-7x-8).$

8. $y = \sin(-5x+6);\quad u = \cos(-3x+7);\quad w = tg(-2x+9);$
$z = ctg(-x+6);\quad v = tg(-4x+5).$

9. $y = \begin{cases} y = 2t-7 \\ x = 6-5t \end{cases};\quad u = \begin{cases} y = 4t-9 \\ x = 2-7t \end{cases};\quad w = \begin{cases} y = 5t-8 \\ x = 4-3t \end{cases};$

$$z=\begin{cases} y=3t-4 \\ x=1-8t \end{cases}; \qquad v=\begin{cases} y=8t-3 \\ x=9-t \end{cases}.$$

10. $y=5\arccos 5x; \quad u=7\arccos 7x; \quad w=5\arccos 5x;$
$z=8\arccos 8x; \quad v=9\arccos 9x.$

В) Знайти похідні першого порядку від складних функцій:

1. $y=\frac{1}{3}x^3\sin 3x; \quad u=\frac{1}{5}x^5\sin 5x; \quad w=\frac{1}{7}x^7\sin 7x;$
$z=\frac{1}{9}x^9\sin 9x; \quad v=\frac{1}{2}x^2\sin 2x.$

2. $y=\sin^3 3x; \quad u=\sin^5 5x; \quad w=\sin^7 7x;$
$z=\sin^9 9x; \quad v=\sin^2 2x.$

3. $y=\cos\sqrt{5x}; \quad u=\cos\sqrt{7x}; \quad w=\cos\sqrt{3x};$
$z=\cos\sqrt{8x}; \quad v=\cos\sqrt{11x}.$

4. $y=e^{\sin x}; \quad u=e^{\cos x}; \quad w=e^{tgx}; \quad z=e^{ctgx}; \quad v=e^{\arcsin x}.$

5. $y=\arccos x\cdot e^x; \quad u=\arcsin x\cdot e^x; \quad w=\cos x\cdot e^x;$
$z=tgx\cdot e^x; \quad v=\sin x\cdot e^x.$

6. $y=\arccos(xe^x); \quad u=\arcsin(xe^x); \quad w=\cos(xe^x);$
$z=tg(xe^x); \quad v=\sin(xe^x).$

7. $y=tgx\cdot\ln x; \quad u=ctgx\cdot\ln x; \quad w=\sin x\cdot\ln x;$
$z=arctgx\cdot\ln x; \quad v=\cos x\cdot\ln x.$

8. $y=\ln tg(-9x-4); \quad u=\ln\sin(5x-4); \quad w=\ln arcctg(17x+6);$
$z=\ln\cos(7x-5); \quad v=\ln ctg(3x-4).$

9. $y=\sqrt{tg5x}; \quad u=\sqrt{ctg7x}; \quad w=\sqrt{\sin 3x};$
$z=\sqrt{\cos 8x}; \quad v=\sqrt{tg(-11x)}.$

10. $y=\sqrt[3]{acr\cos 4x}; \quad u=\sqrt[4]{acr\sin 2x}; \quad y=\sqrt[5]{acrtg5x};$
$z=\sqrt[3]{acrctg7x}; \quad v=\sqrt[4]{acr\cos 8x}.$

Виконати вправи.

1. Знайти похідні першого порядку заданих функцій

a) $y=(5x-3)(7x^3+5x-9)$ b) $u=\left(y+\frac{3}{y}\right)\cdot(y^2-5);$

c) $w=\dfrac{3x-4}{x+5}$; d) $y=\dfrac{3t^2+4t-9}{2t-3}$;

e) $u=\left(2x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$; f) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $y=x^2e^{-x}$; h) $y=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

2. Знайти диференціал першого порядку функцій

a) $y=\dfrac{1+tg\ x}{1-tg\ x}$; b) $y=\sin^3 2x$;

c) $y=3^{\cos x}$; d) $y=\ln ctg^3\sqrt{x}$;

e) $y=\left(e^{\sin x}-1\right)^2$; f) $y=3arctg^2x$;

g) $y=x\cdot\arcsin 2x$; h) $y=\ln^3\sin 4x$.

3. Знайти границі функцій при $x\to x_0$.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$; $x_0=0$; b) $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^3}$; $x_0=1$;

c) $f(x)=\dfrac{\left(e^x+5^x\right)^x}{\left(e^x+5^x\right)^5}$, $x_0\to 0$; d) $f(x)=\dfrac{\left(e^x-x\right)^x}{x}$, $x_0\to 0$.

4. Знайти похідні першого порядку функцій, заданих неявно та параметрично

a) $x^2\sin y+ytgx=0$; b) $e^{x+y}+5x^4-3y^3=0$;

c) $x^2y+x\ln y-\ln x=0$; d) $y\ln x-x\ln y=x+y$;

e) $\begin{cases}y=t^2+\ln\cos t\\ x=t+\ln\sin t\end{cases}$; f) $\begin{cases}x=2t-\sin 2t\\ y=\sin^2 t\end{cases}$;

g) $\begin{cases}y=5t^4-7t^2+5\\ x=3t^3+7t\end{cases}$; h) $\begin{cases}x=ctgt\\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{cases}$.

$y + \Delta y$

Розв’язати задачі з економічним змістом, використовуючи похідну.

a) Знайти маржинальний дохід підприємства, якщо кількість виготовлених та проданих виробів x та роздрібна вартість кожного виробу p пов’язані рівністю $x = 1000 - p$.

b) Розв’язати попередню задачу при умові, що $x = 2500 - 4\sqrt{p}$.

c) Функція витрат підприємства має вигляд
$V(x) = 1000 + 20x - 0{,}1x^2 + 0{,}001x^3$ (тисяч гривень).
Знайти маржинальні витрати при $x = 23,\ x = 33,\ x = 43.$

РОЗДІЛ 7 Застосування основних понять диференціального числення при дослідженні функції

§7.1 Неперервність і точки розриву функції

Функція називається *неперервною на інтервалі*, якщо вона неперервна в усіх точках цього інтервалу.

При знаходженні точок розриву функції можна керуватись такими положеннями:

1) елементарна функція може мати розрив в окремих точках, але не може бути розривною у всіх точках будь-якого інтервалу;
2) елементарна функція може мати розрив лише в тій точці, де вона не визначена;
3) якщо функція задана декількома різними аналітичними виразами для різних інтервалів зміни аргументу, то вона може мати розриви в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

Приклад. Задана функція. Знайти її точки розриву, якщо вони існують, та дослідити поведінку функції в околі точок розриву:

а) $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}$;

в) $f(x)=\lg(x^2+3x)$; г) $f(x)=\begin{cases}-0{,}5x^2 & при\ x\le 2\\ x & при\ x>2\end{cases}$

Розв'язання. **а)** $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. Функція $f(x)$ визначена, а отже, і неперервна на всій числовій осі, окрім точки $x=0$. В точці $x=0$ функція має розрив, оскільки вона визначена в будь-якому околі цієї точки, за виключенням самої точки. Для побудови функції $f(x)=arcctg\frac{1}{x}$, що складається із суперпозиції двох функції $y=arcctgu$ і $u=\frac{1}{x}$, побудуємо кожну із даних елементарна функції.

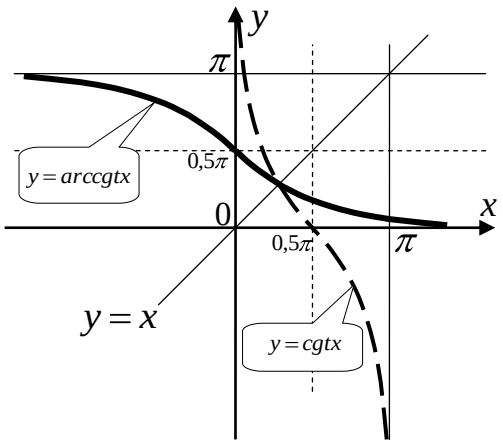


Рис. 7.1

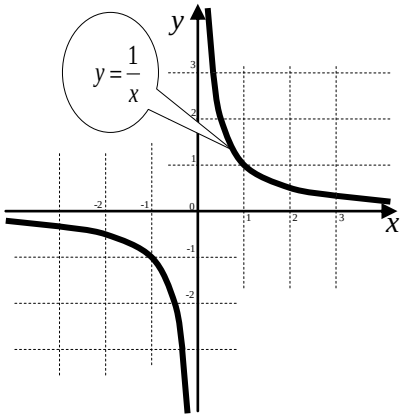


Рис. 7.2

Знайдемо односторонні границі функції в цій точці $x=0$:

$$\lim_{x\to 0-0} arcctg\frac{1}{x}=\langle arcctg(-\infty)\rangle=\pi;\ \lim_{x\to 0+0} arcctg\frac{1}{x}=\langle arcctg(+\infty)\rangle=0.$$

Вираз в дужках $\langle\ldots\rangle$ потрібно розглядати як «процес» прямування аргумента відповідної функції до вказаного значення.

Отже, розрив функції в точці $x=0$ скінчений.

Розглянемо поведінку функції «на наскінченностях»:

$$\lim_{x\to -\infty} arcctg\frac{1}{x}=\langle arcctg(-0)\rangle=\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to +\infty} arcctg\frac{1}{x}=\langle arcctg(+0)\rangle=\frac{\pi}{2}$$

При розгляді границь необхідно використовувати графіки (Рис.7.1 і Рис.7.2) як для визначення характеру поведінки проміжного аргумента $\frac{1}{x}$, так і для поведінки зовнішньої функції *arcctgu*. На інших проміжках поведінку функції $f(x)=arcctg\frac{1}{x}$ можна охарактеризувати як «неперервно-гладку». Отже графік можна представити якісно - схематично у вигляді (Рис.7.3) :

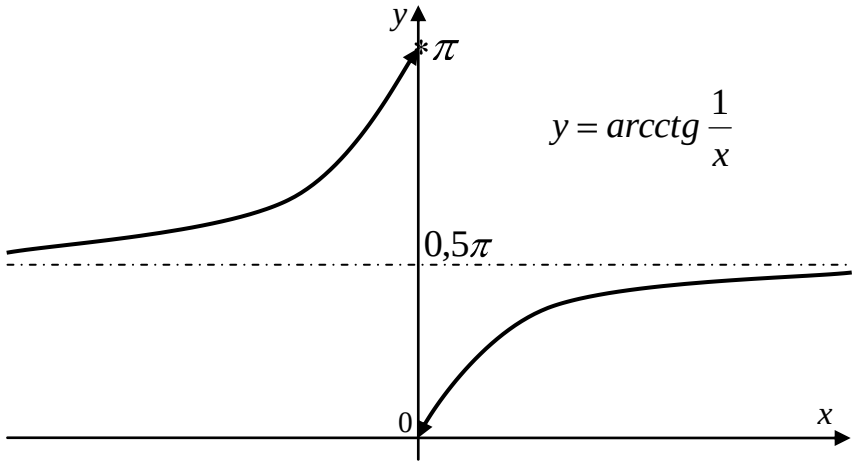


Рис.7.3

б) $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$. Функція $f(x)$ визначена і неперервна на всій числовій осі, крім точки $x=3$. Отже, в точці $x=3$ функція має розрив.

Дослідимо цю точку розриву:

$$\lim_{x\to 3-\varepsilon}\frac{|x-3|}{x-3}=\langle x-3<0\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|3-\varepsilon-3|}{3-\varepsilon-3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|-\varepsilon|}{-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{-\varepsilon}=-1;$$

$$\lim_{x\to 3+\varepsilon}\frac{|x-3|}{x-3}=\langle x-3>0\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|3+\varepsilon-3|}{3+\varepsilon-3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=1$$

Отже, в точці $x=3$ функція має скінчений розрив. Графік функції має вигляд (Рис.7.4):

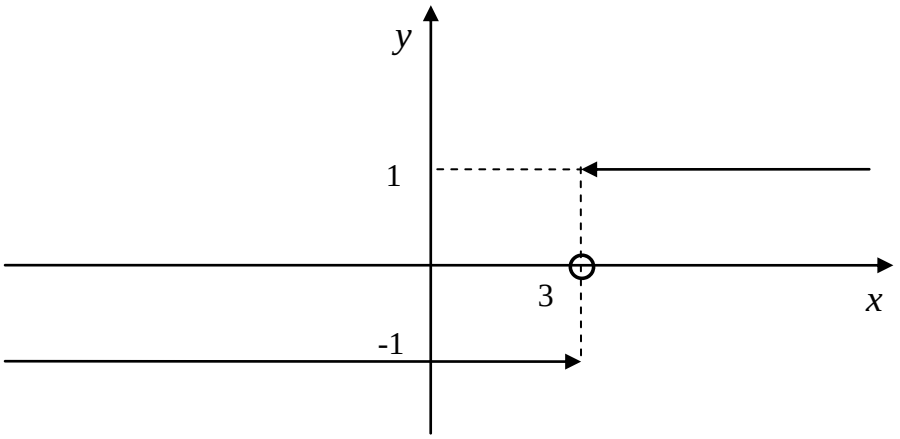


Рис.7.4

в) $f(x)=\lg(x^2+3x)$. Логарифмічна функція $y=\lg u$ визначена лише для додатних значень свого аргументу u. Побудуємо графік функції $y=x^2+3x$.

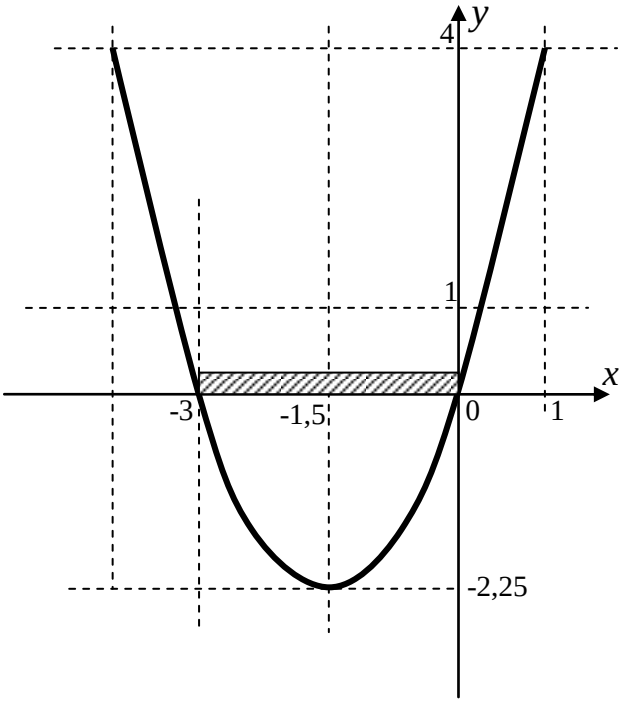


Рис.7.5

Тому логарифмічна функція $f(x)=\lg(x^2+3x)$ буде визначена і неперервна для значень x, що задовольняють нерівності $x^2+3x>0$. Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо область визначення і область неперервності функції: $x\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$ (Рис.7.5). Оскільки графік параболи симетричний відносно прямої $x=-1{,}5$, то побудову зовнішньої функції можна провести спочатку для проміжку $x\in(0;\infty)$, а потім симетрично відобразити відносно прямої $x=-1{,}5$.

У всіх точках відрізка $[-3;0]$ задана функція не визначена, але точками її розриву є лише граничні точки $x=-3$ і $x=0$. В цих граничних точках функція не визначена, але вона визначена в як завгодно близьких точках ліворуч від точки $x=-3$ і праворуч від точки $x=0$. Всі інші внутрішні точки відрізка $[-3;0]$, в яких функція також не визначена, не є точками розриву тому, що в околі цих внутрішніх точок функція не визначена.

Побудуємо графік функції $y=\lg x$ (Рис.7.6).

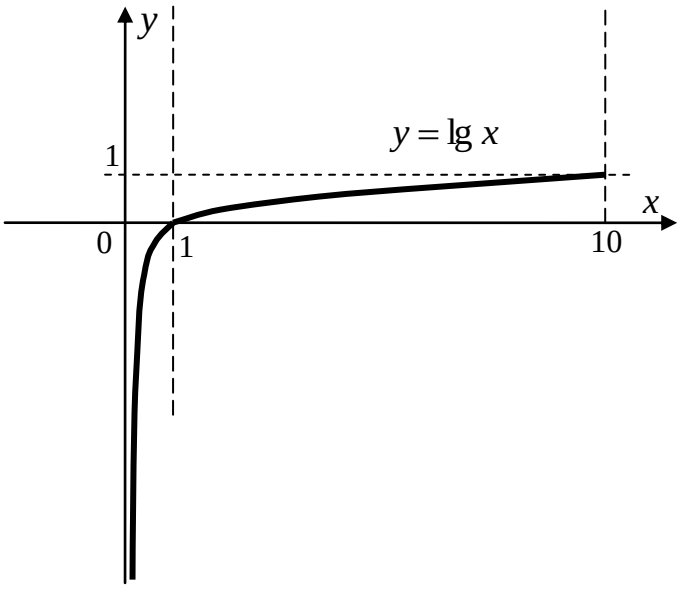


Рис.7.6

Знаходимо односторонні границі функції при прямуванні x до точок розриву зсередини області визначення функції:

$$\lim_{x\to -3-\varepsilon}\lg(x^2+3x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lg(9+6\varepsilon+\varepsilon^2-9-3\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lg(3\varepsilon+\varepsilon^2)=\langle\lg 0\rangle=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+\varepsilon}\lg(x^2+3x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lg(\varepsilon^2+3\varepsilon)=\langle\lg 0\rangle=-\infty$$

Функція в точках $x=-3$ і $x=0$ має нескінченні розриви. Графік функції $f(x)=\lg(x^2+3x)$ має вигляд (Рис.7.7):

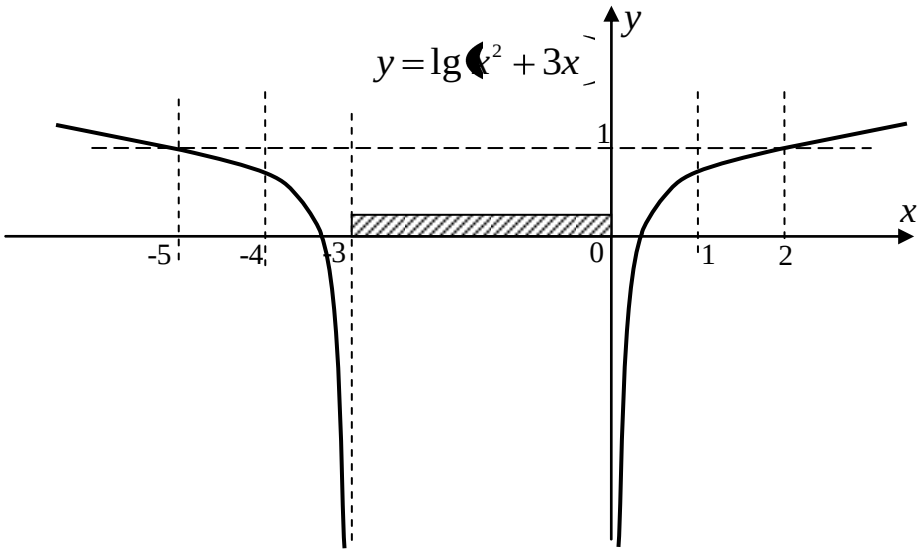


Рис.7.7

г) $f(x)=\begin{cases}-0{,}5x^2 & при\ x\le 2\\ x & при\ x>2\end{cases}$.

Функція $f(x)$ визначена на всій числовій осі. Вона задана двома різними формулами для різних інтервалів зміни аргументу x і може мати розрив в точці $x=2$, де змінюється її аналітичний вираз.

Досліджуючи точку $x=2$, знаходимо односторонні границі функції при прямуванні аргументу до точки зліва і справа:

$$\lim_{x\to 2-\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to 2-\varepsilon}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}(4-4\varepsilon+\varepsilon^2\right)=-2$$

$$\lim_{x\to 2-\varepsilon} f(x)=\lim_{x\to 2+\varepsilon}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}(2+\varepsilon)=2$$

Ліва і права границі функції скінченні, але не рівні між собою. Тому, внаслідок невиконання другої умови неперервності, в точці $x=2$ функція має скінчений розрив. Графік цієї функції має вигляд (Рис.7.8):

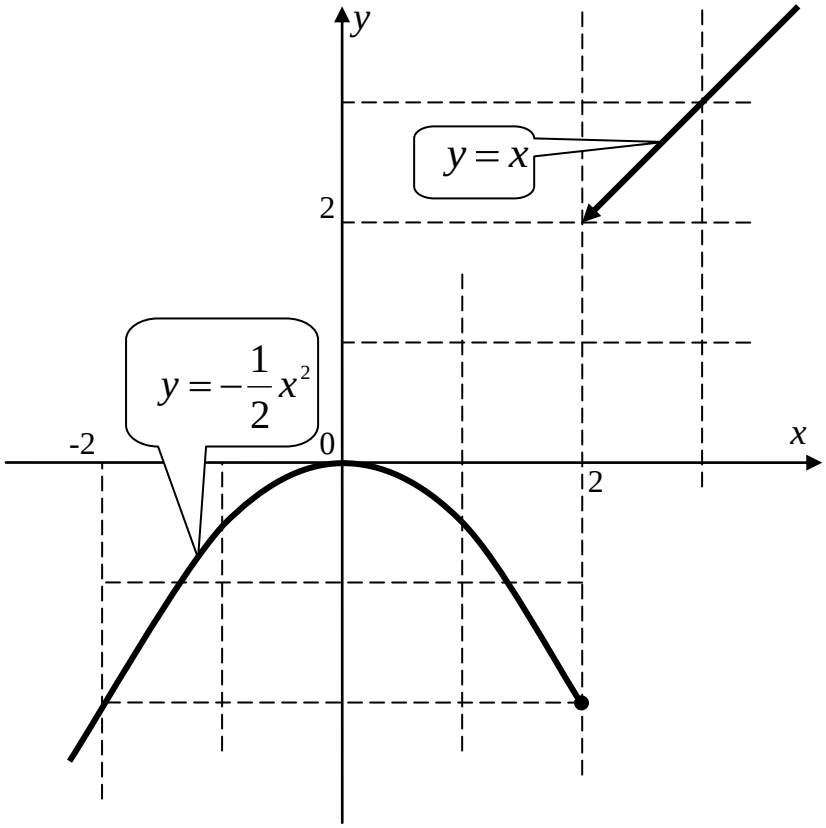


Рис.7.8

§7.2 Правило Лопіталя

Правило Лопіталя застосовується для розкриття невизначеностей при знаходженні границі відношення функцій.

Нехай в деякому околі точки x_0 (за винятком, можливо, самої точки x_0) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані і $\varphi'(x) \neq 0$. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ (або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$), то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точці $x = x_0$ представляє собою невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$. Правило Бернуллі-Лопіталя дає змогу «розкрити» данні невизначеності за допомогою формули

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (7.1)$$

якщо границя в правій частині цієї рівності існує.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точці $x = x_0$ також є невизначеність вигляду 0/0 або ∞/∞ та похідні $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ задовольняють зазначеним умовам, то потрібно перейти до відношення похідних другого порядку і т.д.

У випадку невизначеності вигляду **0·∞** чи ∞-∞ потрібно алгебраїчно перетворити вираз так, щоб привести його до невизначеності вигляду **0/0** або ∞/∞, а далі скористатися правилом Лопіталя. У випадку невизначеності вигляду **0°,** ∞° або 1^{∞} потрібно прологарифмувати дану функцію, знайти границю та провести зворотні перетворення.

Приклад. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$

Розв'язання.

а) Чисельник і знаменник дробу $\dfrac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}$ прямують до нуля при $x\to 1$, тому маємо невизначеність вигляду 0/0. Скористаємося правилом Лопіталя, тобто розглянемо відношення похідних заданих функцій:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-\ln x}{e^x-e}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1/x}{e^x}=\frac{1}{e}$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. Це невизначеність вигляду 0/0. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

Тут правило Лопіталя використано двічі.

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$. Це невизначеність вигляду $\mathbf{1}^{\infty}$. Логарифмуючи та використовуючи правило Лопіталя, отримуємо:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}=\langle 1^{-\infty}\rangle\Rightarrow\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\langle -\infty\cdot 0\rangle=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{1+x}=\langle 0\cdot\infty\rangle=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=2\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-2\lim_{x\to 0}x=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}y=e^0=1$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

§7.3 Застосування диференціального числення для дослідження функції і побудови графіків

Зростання і спадання функцій

Функція $f(x)$ називається *зростаючою на інтервалі* $(a;b)$, якщо для будь-яких двох точок x_1 і x_2 з вказаного інтервалу, які задовольняють нерівність $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція $f(x)$ називається *спадною на інтервалі* $(a;b)$, якщо для будь-яких двох точок x_1 і x_2 з вказаного інтервалу, які задовольняють нерівність $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Ознаки зростання та спадання функції

1) Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(a;b)$ (Рис.7.9 – інтервали $(x_1;x_2),(x_2;x_3)$).
2) Якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(a;b)$ (Рис.7.9 – інтервали $(a;x_1),(x_3;b)$).

Приклад. Знайти інтервали зростання і спадання функції $y = x(1+\sqrt{x})$.

Розв'язання. Запишемо ОДЗ функції : $x \in [0;\infty)$.

Знаходимо похідну: $y' = \left(x + x^{1,5}\right)' = 1 + 1{,}5x^{0,5}$. Так як похідна додатна на ОДЗ, то функція зростає на всій області визначення.

Екстремум функції

Значення $f(x_0)$ називається *максимумом* функції $f(x)$, якщо при будь-якому достатньо малому $\varepsilon > 0$ виконуються умови $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0)$; $f(x_0 + \varepsilon) < f(x_0)$. Точка x_0 називається в цьому випадку точкою *максимуму* функції $f(x)$ (Рис.7.9 – точка x_3).

Значення $f(x_0)$ називається *мінімумом* функції $f(x)$, якщо при будь-якому достатньо малому $\varepsilon > 0$ виконуються умови $f(x_0 - \varepsilon) > f(x_0)$; $f(x_0 + \varepsilon) > f(x_0)$. Точка x_0 називається в цьому випадку точкою *мінімуму* функції $f(x)$.(Рис.7.9 – точка x_1).

Максимум або мінімум функції називається ***екстремумом*** функції. Точка максимуму чи мінімуму функції називається точкою *її екстремуму.*

Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум, то похідна *f'(x)* в точці x_0 перетворюється на нуль або не існує (Рис.7.9 – точки x_1 x_2 x_3).

Точка x_0, в якій $f'(x_0)=0$, називається *стаціонарною* точкою (Рис.7.9 – точки x_1 x_2 x_3).. Точки, в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існують, називаються *критичними* точками. Не кожна критична точка є точкою екстремуму (Рис.7.9 – точка x_2).

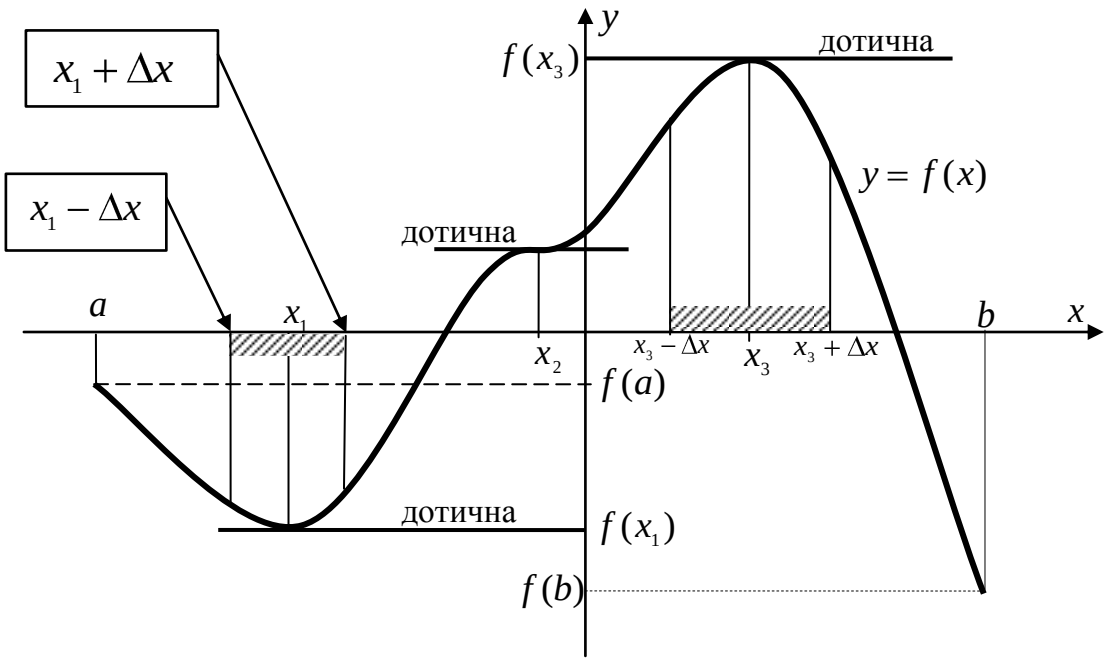


Рис.7.9

Достатні умови екстремуму

Правило 1. Якщо x_0 - критична точка функції $f(x)$ і при будь-якому достатньо малому $\Delta x>0$ виконуються нерівності $f'(x-\Delta x)>0$, $f'(x+\Delta x)<0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум; якщо ж $f'(x-\Delta x)<0$, $f'(x+\Delta x)>0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має мінімум. Якщо знаки $f'(x-\Delta x)$ і $f'(x+\Delta x)$ однакові, то функція $f(x)$ в точці x_0 екстремуму не має.

Правило 2. Якщо $f'(x_0)=0$ і $f''(x_0)\neq 0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум, а саме максимум, якщо $f''(x_0)<0$, або мінімум, якщо $f''(x_0)>0$. Якщо $f''(x_0)=0$, то необхідно застосовувати більш високі похідні.

Для знаходження ***найбільшого (найменшого)*** значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ треба із значень функції на границях відрізка та в критичних точках, які належать цьому відрізку, вибрати найбільше (найменше) (Рис.7.9 – мінімальне значення функція приймає в точці $x=b$; максимальне значення функція приймає в точці локального максимуму $x=x_3$).

Приклад . Дослідити на екстремум функцію $y=(x-1)^4$.

Розв'язання. Знаходимо похідну $y'=4(x-1)^3$.

$4(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1$ - стаціонарна точка.

Друга похідна $y''=12(x-1)^2$ при $x=1$ дорівнює нулю. Третя похідна $y'''=24(x-1)$ при $x=1$дорівнює нулю. Четверта похідна $y^{(IV)}=24>0$. Отже, за правилом 2 приходимо до висновку, що у точці $x=1$ функція має мінімум $y_{\min}=0$.

Опуклість, вгнутість, точки перегину

Графік функції $y=f(x)$ називається ***опуклим*** на інтервалі $(b;c)$, якщо він розміщений ***нижче дотичної***, проведеної в будь-якій точці $\tilde{x}$ цього інтервалу (Рис 7.10).

Графік функції $y=f(x)$ називається ***вгнутим*** на інтервалі $(a;b)$, якщо він розміщений ***вище дотичної***, проведеної в будь-якій точці $\bar{x}$ цього інтервалу (Рис 7.10).

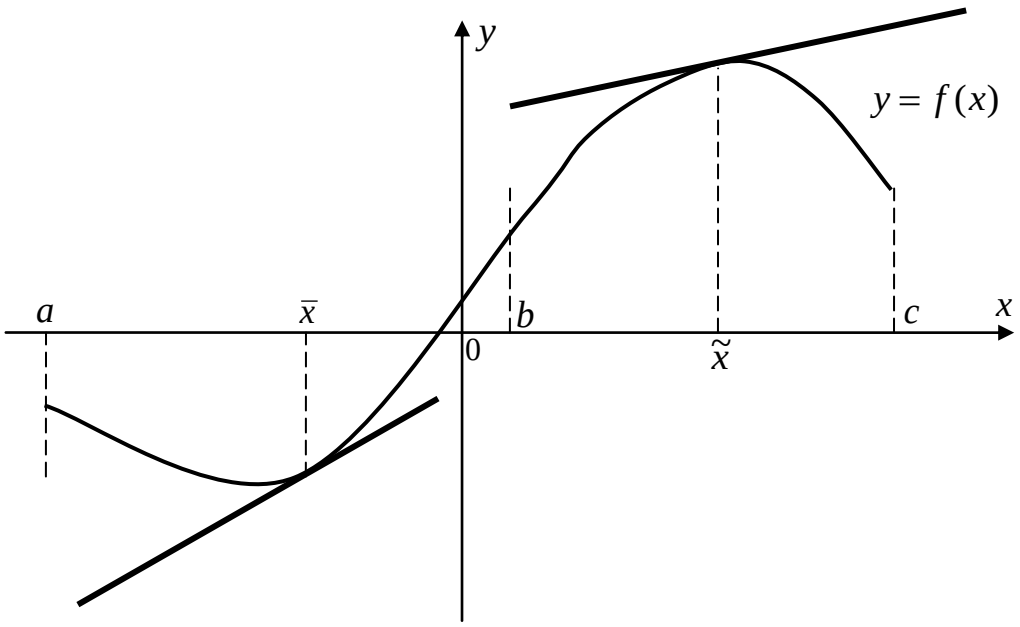


Рис.7.10

Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції:

- *я*кщо $f''(x) < 0$ на інтервалі *(a, b),* то графік функції є опуклим на цьому інтервалі;
- якщо $f''(x) > 0$, на інтервалі *(a, b),* то графік функції – вгнутий на цьому інтервалі.

Точка $P(x_0; f(x_0))$ графіка функції, яка відокремлює його опуклу частину від вгнутої, називається *точкою перегину* (на Рис.7.10 - $x_0 = b$).

Якщо x_0 - абсциса точки перегину графіка функції $y = f(x)$, то друга похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує. Точки, в яких $f''(x) = 0$ або $f''(x)$ не існує, називаються *критичними точками другого роду.*

Якщо x_0 - критична точка другого роду і при переході через неї друга похідна змінює знак на протилежний, то точка кривої $y = f(x)$ з абсцисою x_0 є точкою ***перегину***. Якщо ж друга похідна має однакові знаки, то точка кривої з абсцисою x_0 не є точкою перегину.

Приклад Знайти проміжки опуклості та вгнутості графіка функції $y = x^5 + 5x - 6$

Розв'язання. Знаходимо $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$. Якщо $x < 0$, то $y'' < 0$ і крива опукла; якщо ж $x > 0$,то $y'' > 0$ і крива вгнута. Отже, крива опукла на проміжку $(-\infty; 0]$ і вгнута на проміжку $[0; \infty)$.

Приклад Знайти екстремуми функції $y = (x+1)^2(x-2)$ і точки перегину її графіка.

Розв'язання. Знаходимо першу похідну

$$y' = 2(x+1)(x-2) + (x+1)^2 = (x+1)(2x-4+x+1) =$$
$$= (x+1)(3x-3) = 3(x+1)(x-1)$$

Корені першої похідної $x_1 = -1; x_2 = 1$. Знайдемо другу похідну $y'' = 6x$. Знайдемо значення другої похідної в стаціонарних точках:

$y''(-1) = -6 < 0$. Отже, $y_{\max} = 0$.

$y''(1) = 6 > 0$. Отже, $y_{\min} = -4$.

Знайдемо точку перегину. Для чого другу похідну прирівнюємо до нуля: $6x = 0$. Отже, $x = 0$.

Зліва від точки $x = 0$ маємо $y'' < 0$ — крива опукла.

Справа від точки $x = 0$ маємо $y'' > 0$ – крива вгнута.

Відповідно, точка з абсцисою $x = 0$ є точкою перегину: $y_{т.\ пер.} = -2$.

Асимптоти

Пряма L називається *асимптотою кривої* $y = f(x)$, якщо відстань точки $M(x; y)$ кривої до прямої прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки по кривій від початку координат (тобто при прямуванні хоча б однієї з координат точки до нескінченності).

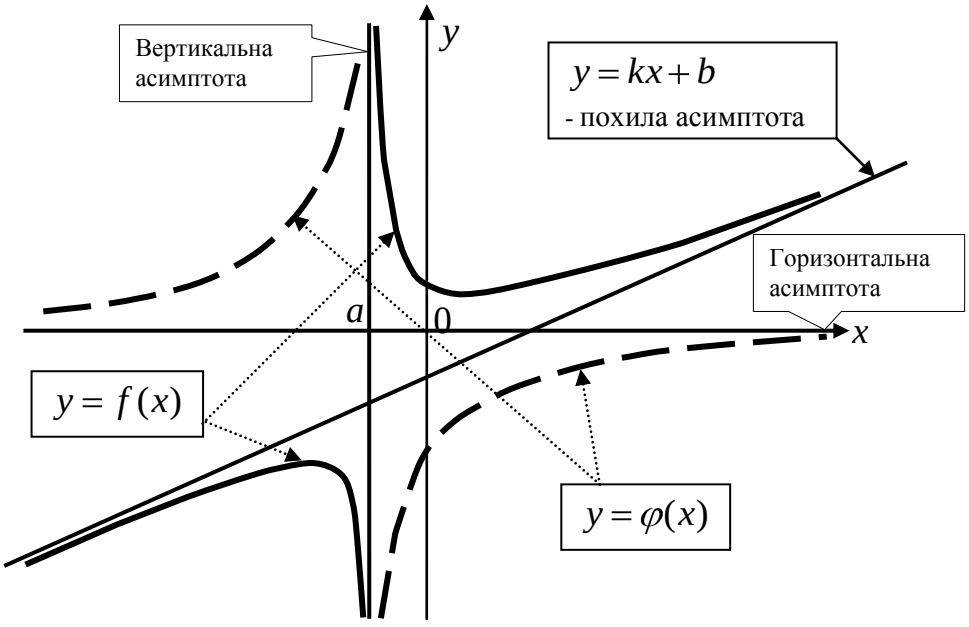


Рис.7.11

Пряма $x = a$ *є вертикальною асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty .$$

Пряма $y = b$ *с горизонтальною асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо існує границя

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \ \text{або} \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Пряма $y = kx + b$ є *похилою асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо існують границі

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right] \tag{7.2}$$

Приклад. Знайти асимптоти кривої $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ функції:

$$\frac{x^3}{x-2} \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{cases} x \ge 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array} \right. \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$$

Функція визначена в інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(2;+\infty)$.

Розглянемо поведінку функції в околах «пограничних» точок $x = 0$ і $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2+\varepsilon} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\frac{(2+\varepsilon)^3}{2+\varepsilon-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\frac{(2+\varepsilon)^3}{\varepsilon}} = +\infty .$$

Отже пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою кривої.

$$\lim_{x\to 0-\varepsilon} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\frac{(0-\varepsilon)^3}{0-\varepsilon-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\frac{-\varepsilon^3}{-(2+\varepsilon)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\frac{\varepsilon^3}{(2+\varepsilon)}} = 0 .$$

Отже пряма $x = 0$ не буде вертикальною асимптотою кривої.

Проведемо дослідження на існування горизонтальних асимптот.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} = \infty$$

Горизонтальних асимптот крива не має.

Визначимо чи існують похилі асимптоти. Знаходимо:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{1-2/x}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}[\,f(x) - k_1 x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x - x + 2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\cdot\left(1 + \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1.$$

Отже, існує права похила (при $x \to \infty$) асимптота $y = x + 1$.

Розглянемо існування асимптоти при $x \to -\infty$.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x^2(x-2)}} = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x}{(x-2)}} = -1.$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}[\,f(x) - k_2 x] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x + x - 2)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x} + \sqrt{2-x})} = -1.$$

Отже, існує ліва похила (при $x \to -\infty$) асимптота $y = -x - 1$.

Схема повного дослідження функції та побудова її графіка

Для повного дослідження функції і побудови її графіка можна рекомендувати таку схему:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти точки розриву функції і вказати їх характер, вертикальні асимптоти (якщо існують);

3) визначити парність, непарність, періодичність функції;

4) дослідити функцію на монотонність і екстремум;

5) визначити інтервали опуклості і вгнутості, точки перегину**;**

6) знайти асимптоти графіка функції;

7) обчислити точки перетину графіка функції з осями координат;

8) побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Застосуємо рекомендовану схему..

1) Задана функція визначена для всіх x. ОДЗ $x\in R$.

2) Функція не має точок розриву. Вертикальних асимптот немає, так як задана функція не має нескінченних розривів.

3) Функція є ні парною ні непарною; не періодична.

$$y(-x)=\sqrt[3]{(-x+3)(-x)^2}=\sqrt[3]{(3-x)(x)^2}\neq y(x)$$

4) Знаходимо похідну функції:

$$y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}\ \Rightarrow\ y=(x+3)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$$

$$y'=\left((x+3)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(x+3)^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}+\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x+2(x+3)}{3\sqrt[3]{x(x+3)^2}}=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$$

$f'(x)=0$ при $x_1=-2$ і не існує в точках $x_2=-3, x_3=0$.

Ці точки розбивають всю область визначення функції на інтервали $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)$, $(-2;0)$, $(0;+\infty)$. Всередині кожного з отриманих інтервалів зберігається знак похідної, а саме:

$f'(x)>0$ на інтервалах $(-\infty;-3)$, $(-3;-2)$, $(0;+\infty)$ і

$f'(x)<0$ на $(-2;0)$.

Це означає, що функція зростає на інтервалі $(-\infty;-2)$, спадає на інтервалі $(-2;0)$ і зростає на інтервалі $(0;+\infty)$.

Так як в околі точки $x_1=-2$ знак похідної першого порядку при збільшенні x змінюється з "+" на "-", то $x_1=-2$ є точкою максимум і $y_{\max}=y(-2)=\sqrt[3]{4}$.

Для точки $x_3=0$ знак похідної першого порядку змінюється з "-" і "+", тобто $x_3=0$ - точка мінімуму і $y_{\min}=y(0)=0$.

В точці $x_2=-3$ функція не має екстремуму, так як в її околі $f'(x)$ не змінює знак.

5) Знаходимо похідну другого порядку:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}} \right)' = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}},$$

Друга похідна не дорівнює нулю для будь-якого довільного x. Тому точками перегину можуть бути лише ті точки кривої, в яких похідна другого порядку не існує, тобто $x_2 = -3$ і $x_3 = 0$. Визначимо знак y'' в кожному з інтервалів, на які знайдені точки розбивають область визначення функції:

- $y'' > 0$ при $x \in (-\infty; -3)$ - крива вгнута;
- $y'' < 0$ при $x \in (-3; 0)$ - крива опукла;
- $y'' < 0$ при $x \in (0; +\infty)$ крива опукла.

Так як в околі точки $x_2 = -3$ похідна другого порядку змінює знак, то $M(-3; 0)$ є точкою перегину.

Точка $x_3 = 0$ не є точкою перегину, так як в її околі знак y'' не змінюється.

6) Графік функції має похилу асимптоту $y = kx + b$, якщо існують границі

$$k = \lim_{x \to \times\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x \to \times\infty} [f(x) - kx]$$

Обчислимо їх для заданої функції

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{(x+3)x^2} - x)(\sqrt[3]{(x+3)^2 x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2)}{(\sqrt[3]{(x+3)^2 x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2)} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+3)x^2 - x^3}{(\sqrt[3]{(x+3)^2 x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{(\sqrt[3]{(x+3)^2 x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2)} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + 6/x + 9/x^2} + \sqrt[3]{1 + 3/x + 1}} = 1$$

Отримали рівняння похилої асимптоти $y = x + 1$.

7)Функція перетинає вісь *Ox* при $x = -3$ і $x = 0$, а вісь *Oy* при $y = 0$.

8)За результатами досліджень будуємо графік функції(Рис. 7.12):

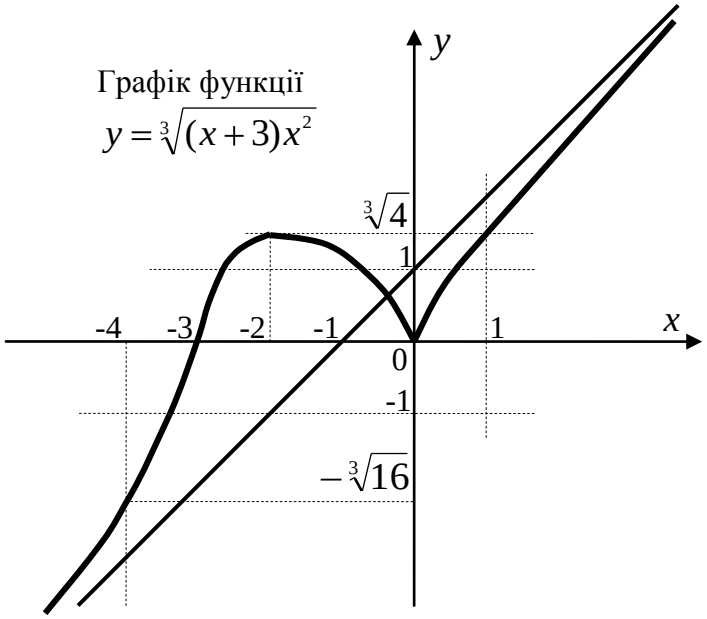


Рис.7.12

При необхідності більш точної побудови графіка функції знаходять значення функції в декількох контрольних точках.

§7.4 Використання поняття похідної в економічних розрахунках

Розглянемо співвідношення між середніми та граничними (маржинальними) величинами при монопольному та конкурентному ринках.

В умовах монополії група фірм повністю контролює пропозицію деякої продукції, а отже, і її ціну. В такому випадку, як показує досвід, із збільшення ціни попит на продукцію падає. Припустимо, що цей процес проходить по прямій. Тобто крива попиту $P(m)$ є лінійна спадна функція $P=am+b$, при $a<0\ i\ b>0$. В такому випадку сумарний дохід реалізації продукції виражається формулою $D=(am+b)m=am^2+bm$. Середній дохід на одиницю продукції буде $AD=\frac{D}{m}=am+b$, а граничний (маржинальний) доход (додатковий дохід від реалізації одиниці додаткової продукції) складатиме $MD=(D)'=2am+b$. Отже, в умовах монопольного ринку із зростання кількості реалізованої продукції граничний прибуток зменшується і, відповідно, зменшується середній прибуток (Рис.7.13).

В умовах досконалої конкуренції, коли на ринку функціонує достатньо велика кількість фірм і жодна з них не здатна контролювати рівень цін, стабільна реалізація продукції можлива при домінуючій ринковій ціні. Наприклад, $P = b$. В такому випадку сумарний дохід буде $D = bm$, і, відповідно, середній дохід буде $AD = \frac{D}{m} = b$. Граничний дохід буде $MD = (R)' = b$. Таким чином, в умовах вільної конкуренції, середній та маржинальний прибутки збігаються (на відміну від монопольного ринку) (Рис.7.14).

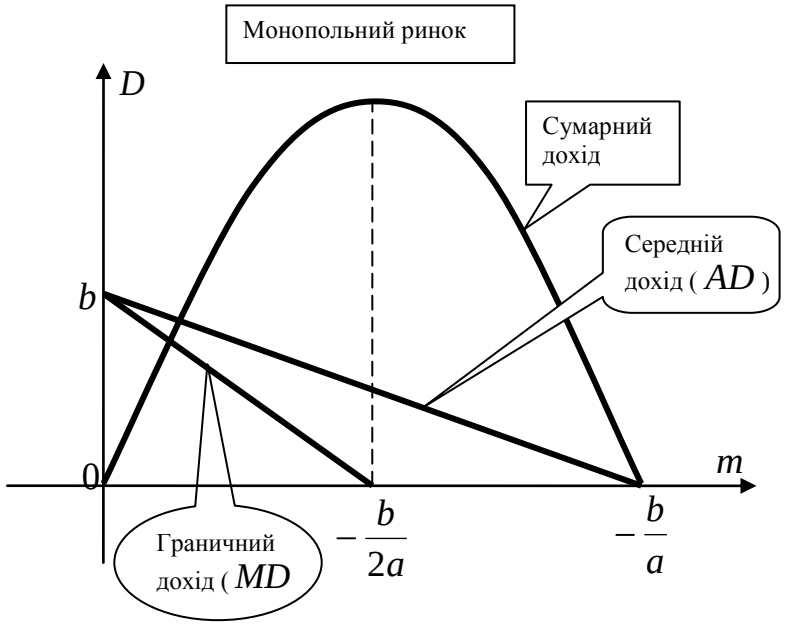


Рис.7.13

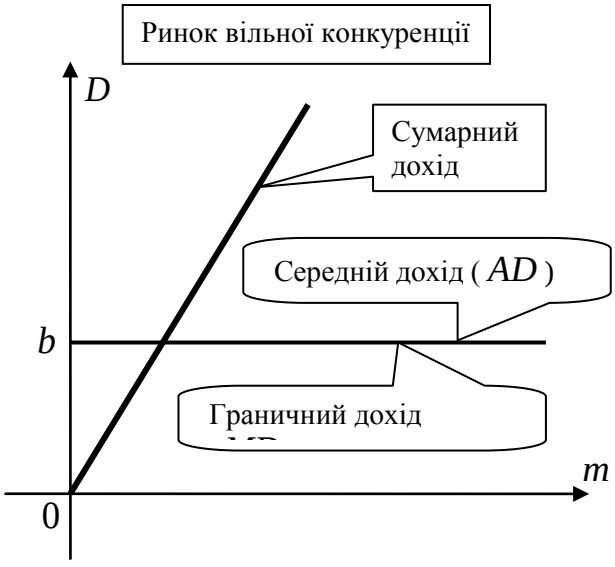


Рис.7.14

§7.5 Еластичність функції

Поряд із граничним аналізом, важливе місце в дослідженні економічних процесів займає поняття еластичності функції і коефіцієнти еластичності. Пов'язано це з тим, що в багатьох практичних задачах зручно або необхідно обчислювати процент приросту залежної змінної, що відповідає проценту приросту незалежного аргументу.

Означення: ***Еластичністю функції*** $y = y(x)$ називається границя відношення відносного приросту функції $\frac{\Delta y}{y}$ до відносно приросту аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$. Еластичність функції позначається символом $E_x(y)$. Отже

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y} \cdot y'. \qquad (7.3)$$

Еластичність функції показує на скільки відсотків зміниться функція $y = y(x)$ при зміні незалежного аргумента x на один відсоток.

Властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$. Отже $E_x(y) = x \cdot T_y$. (7.4)
2. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичності цих функції $E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v)$ (7.5)
3. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичності цих функції $E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$. (7.6)
4. Еластичності взаємно обернених функцій - взаємно обернені величини.
$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)} \qquad (7.7)$$
5. Геометрична інтерпретація еластичності функції.
Перепишемо формулу (7.3), враховуючи геометричну інтерпретацію першої похідної (6.2)
$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot tg\alpha,$$
де $tg\alpha$ - тангенс кута нахилу дотичної до кривої $y = y(x)$ в деякій точці $N(x; y)$.

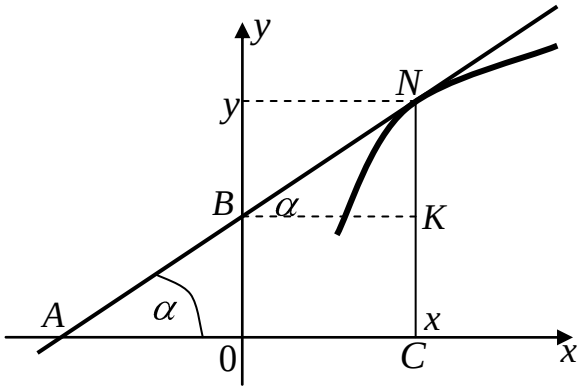


Рис.7.15

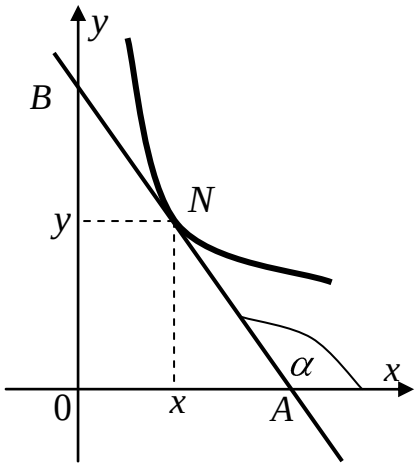


Рис.7.16

З трикутника NBK (Рис.7.15) маємо

$$\frac{NK}{BK} = tg\alpha \;\Rightarrow\; NK = BK \cdot tg\alpha \;\Rightarrow\; NK = x \cdot tg\alpha$$

З подібності трикутників NBK і NAC маємо

$$\frac{NB}{NK} = \frac{NA}{NC} \;\Rightarrow\; \frac{NB}{xtg\alpha} = \frac{NA}{y} \;\Rightarrow\; \frac{NB}{NA} = \frac{xtg\alpha}{y} \;\Rightarrow\; E_x(y) = \frac{NB}{NA}$$

Отже, еластичність функції (по абсолютній величині) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від точки дотику до перетину її з осями координат.

Якщо точки перетину лежать по одну сторону від точки дотику $N(x;y)$, то еластичність функції додатна - $E_x(y) > 0$ (Рис.7.15).

Якщо точки перетину лежать по різні сторони від точки дотику $N(x;y)$, то еластичність функції від'ємна - $E_x(y) < 0$ (Рис.7.16).

Еластичність функції застосовується при аналізі попит і пропозиції. Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) більший за одиницю, то попит вважається еластичним. Отже,

якщо $|E_x(y)| > 1 \;\Rightarrow$ попит еластичний відносно ціни(доходу).

Якщо $|E_x(y)| < 1 \;\Rightarrow$ попит нееластичний відносно ціни(доходу).

Якщо $|E_x(y)| = 1 \;\Rightarrow$ попит з одиничною еластичністю (попит нейтральний).

Розглянемо як впливає еластичність попиту відносно ціни на сумарний доход $Z = p \cdot q$ при реалізації при реалізації продукції, при умові, що $p = p(q)$ - довільна функція. Знайдемо граничний доход при $Z = p \cdot q = q \cdot p(q)$

$$Z'_q = (q \cdot p(q))'_q = p(q) + q \cdot p'_q = p(1 + \frac{q}{p} p'_q) = p(1 + E_q(p)) \qquad (7.8)$$

Використовуючи формулу (7.7), і , враховуючи, що $E_p(q) < 0$, маємо

$$Z'_q = p(1 + E_q(p)) = p\left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|}\right) \qquad (7.9)$$

при довільній кривій попиту.

Якщо попит нееластичний - $|E_p(q)|<1$, то граничний дохід (7.9) буде від'ємним при будь-якій ціні.

Якщо попит еластичний - $|E_p(q)|>1$, то граничний дохід (7.9) буде додатнім.

Отже, при нееластичному попиті зміна ціни та греаничного доходу відбуваються в одному напрямку, а при еластичному – в різних. Тому при зростанні ціни для продукції еластичного попиту сумарний дохід від реалізації продукції збільшується, а для товарів нееластичного попиту – зменшується.

Приклад. Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x, що випускається, визначається функцією $y=60x-0{,}03x^3$(грош. од.). Визначити середні та граничні витрати за умови, що обсяг продукції 20 одиниць.

Середні витрати на одиницю продукції знаходяться за формулою

$$y_{сер}=\frac{витрати\ \ виробництва\ (y)}{обсяг\ \ продукції\ \ (x)}=\frac{y}{x}=\frac{60x-0{,}03x^3}{x}=60-0{,}03x^2.$$

При $x=20$, $y_{сер}(20)=60-0{,}03\cdot 400=60-12=48.$

Граничні витрати знаходяться з використання похідної

$$y_{граничні}=MY=\left(60x-0{,}03x^3\right)'=60-0{,}09x^2 \ \Rightarrow MY_{|x=20}=60-36=24.$$

З розрахунків бачимо, що середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 48(гр..од.), а граничні витрати (додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва в 20 одиниць продукції) складають 24(гр..од.).

РОЗДІЛ VII **Контрольні завдання**

При оформлені контрольної роботи студент повинен строго притримуватись наступних вимог:

1. виконувати контрольну роботу строго по своєму варіанту;

ВАРІАНТ ВИЗНАЧАЄТЬСЯ ЧИСЛОМ, ЩО УТВОРЮЄТЬСЯ ДВОМА ОСТАННІМИ ЦИФРАМИ СТУДЕНТСЬКОГО КВИТКА. ***НАПРИКЛАД: №417 – ВАРІАНТ №17; №583 - ВАРІАНТ №23 (83=2*30+23, - остача від ділення 83 на 30)***

2. кожну контрольну роботу виконувати в окремому зошиту в клітинку чорнилами синього або чорного кольору. В зошиті повинні бути поля для зауважень та декілька чистих сторінок в кінці для можливого перероблення прикладів.
3. оформлення титульної сторінки зошита повинно відповідати приведеному зразку:

ДЕРЖАВНИЙ КОМІТЕТ СТАТИСТИКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ СТАТИСТИКИ, ОБЛІКУ ТА АУДИТУ

Заочний факультет
Студентський квиток № 07.64-32

Контрольна робота
з вищої математики
студентки II курсу, групи ОА-2(07.64)
Коваленко Ірини Василівни
ВАРІАНТ №

ДОМАШНЯ АДРЕСА
01001, Київ -001
вул. О.Гончара, буд.№333, кв.333
тел. 333-33-33
Коваленко Ірина Василівна

В кінці роботи необхідно поставити дату виконання та особистий підпис.

При виконані контрольної роботи студент повинен:

- розташовувати задачі в порядку зростання номерів, зберігаючи їх нумерацію;
- перед розв'язком кожної задачі повністю переписати її умову, замінив, якщо потрібно, загальні дані даними свого варіанта;
- розв'язок вправи записувати акуратно, докладно, супроводжуючи поясненнями та рисунками;

Контрольна робота вважається не виконаною, якщо:

— виконана по чужому варіанту;

— виконана неохайно, без проміжних обчислень;

— не захищена до початку сесії згідно порядку, що встановлений деканатом;

Студент, що не виконав або не захистив контрольну роботу до іспиту не допускається.

Іспити та заліки

Іспити та заліки по математиці служать для перевірки та оцінки роботи студента-заочника по засвоєнню теоретичних питань програми, вміння застосовувати теорію до розв'язування задач, розвитку творчого мислення та набутих навиків самостійності.

Прийом іспитів та заліків проводиться в порядку та об'ємі, що визначається навчальним планом і програмою курсу.

Основні питання з програми курсу вищої математики для студентів-заочників економічних спеціальностей ДАСОА.

Перший семестр

1. Визначники, їх властивості.
2. Мінори. Алгебраїчні доповнення. Розкриття визначників вищих порядків.
3. Матриця. Дії над матрицями.
4. Обернена матриця. Знаходження елементів оберненої матриці.
5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Методи розв'язування: метод Крамера; матричний метод; метод Гаусса; метод Жордана-Гаусса.
6. Вектори. Означення, властивості і лінійні дії з ними.
7. Розклад вектора за базисом. Координати вектора.
8. Скалярний добуток двох векторів. Означення і властивості скалярного добутку.
9. Скалярний добуток: означення та правило знаходження через координати векторів. Умови взаємної перпендикулярності та паралельності двох векторів.
10. Векторний добуток двох векторів. Властивості векторного добутку; правило знаходження через координати векторів.
11. Мішаний добуток трьох векторів: означення , правило знаходження через координати векторів та геометричний зміст.
12. Рівняння прямої лінії на площині. Типи рівнянь. Рівняння прямої лінії, яка визначається направляючим вектором та точкою.
13. Загальне рівняння прямої лінії. Аналіз розташування прямої лінії в системі координат.
14. Загальне рівняння прямої на площині. Рівняння прямої "у відрізках".
15. Рівняння прямої лінії на площині. Типи рівнянь. Рівняння прямої лінії, яка визначається нормальним вектором та точкою.
16. Рівняння прямої лінії на площині. Типи рівнянь. Рівняння прямої лінії, що проходить через дві задані точки.
17. Кутовий коефіцієнт прямої. Рівняння прямої лінії за кутовим коефіцієнтом та точкою.
18. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
19. Нормальне рівняння прямої лінії. Відстань від точки до прямої лінії.
20. Криві лінії другого порядку на площині. Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола. Їх рівняння.
21. Функція. Способи задання.
22. Елементарні функції: їх графіки та властивості.
23. Монотонність, обмеженість, парність, періодичність функції.
24. Числова послідовність. Границя числової послідовності.
25. Границя функції в точці. Односторонні границі.
26. Нескінченно малі величини. Їхні властивості. Порівняння нескінченно малих величин.
27. Основні теореми про границі.
28. Перша та друга чудові границі.
29. Розкриття невизначеностей.
30. Неперервність функції. Точки розриву. Властивості неперервних функцій.

31. Поняття похідної. Механічний, фізичний, геометричний та економічний зміст похідної.
32. Таблиця похідних від елементарних функцій.
33. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші.
34. Правило Лопіталя.
35. Монотонність функції. Локальний екстремум функції.
36. Загальна схема дослідження функції та побудова графіка.

Другий семестр

1. Комплексні числа. Дії над комплексними числами.
2. Форми представлення комплексних чисел. Формула Муавра.
3. Корінь з комплексного числа. Формула Ейлера.
4. Первісна та невизначений інтеграл.
5. Основні властивості невизначеного інтеграла. Табличні інтеграли.
6. Метод безпосереднього інтегрування та метод інтегрування підстановками.
7. Метод заміни змінної в невизначеному інтегралі.
8. Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.
9. Інтегрування раціональних дробів. Елементарні дроби та їх інтегрування.
10. Інтегрування ірраціональних виразів. Тригонометричні підстановки.
11. Інтегрування функції $R(\sin x, \cos x)$ за допомогою універсальної підстановки.
12. Визначений інтеграл: умови існування, геометричний зміст.
13. Основні властивості визначеного інтеграла. Достатня умова існування визначеного інтеграла.
14. Формула Ньютона-Лейбніца.
15. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
16. Застосування визначеного інтеграла до обчислення площі криволінійної трапеції.
17. Застосування визначеного інтеграла до обчислення довжини дуги кривої та об'єму тіла обертання.
18. Невласні інтеграли першого та другого роду.
19. Функція багатьох змінних. Основні поняття ті властивості.
20. Границя та неперервність функції багатьох змінних (ФБЗ).
21. Частинні похідні та диференціал ФБЗ.
22. Похідна за напрямом та градієнт функції.
23. Частинні похідні вищих порядків.
24. Екстремум функції двох змінних. Необхідна умова існування екстремуму.
25. Достатня умова існування екстремуму функції двох змінних.
26. Дослідження функції двох змінних на екстремум.
27. Умовний екстремум.
28. Подвійний інтеграл.
29. Обчислення та застосування подвійних інтегралів.
30. Звичайні диференціальні рівняння (ДР) першого порядку. Основні поняття.
31. Диференціальні рівняння з відокремлювальними змінними.
32. Однорідні ДР. Методика розв'язку.
33. Лінійні ДР першого порядку. Рівняння Бернуллі. Методика розв'язку.
34. ДР вищих порядків. Рівняння, які допускають пониження порядку.
37. Лінійні диференціальні рівняння (ЛДР) вищих порядків та їх властивості. Побудова загального розв'язку.
38. Однорідні ЛДР другого порядку із сталими коефіцієнтами. Побудова загального розв'язку.
39. Неоднорідні ЛДР другого порядку із сталими коефіцієнтами. Побудова загального розв'язку.
40. Поняття числового ряду. Збіжність ряду та його сума.
41. Властивість збіжних числових рядів.

42. Знакододатні ряди. Необхідна умова збіжності ряду.
43. Достатні умова збіжності ряду. Ознаки порівняння і Д'Аламбера.
44. Радикальна та інтегральна ознаки Коші.
45. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність.
46. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца.
47. Функціональні ряди. Область збіжності.
48. Ознака Вейєрштрасса.
49. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності. Властивості степеневих рядів.
50. Ряди Тейлора і Маклорена.
51. Розгортання в степеневі ряди функцій.

$e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^m, (1-x)^{-1}, \ln(1+x), arctgx$

52. Наближені обчислення за допомогою степеневих рядів.

1. *ЛІНІЙНА АЛГЕБРА*

Задача 1.1 Обчислити визначник, використовуючи його властивості

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Значення коефіцієнтів вибрати згідно номера свого варіанту з таблиці

№ вар	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
1	**-3**	**-2**	**4**	**4**	**-4**	**3**	**-4**	**5**	**-1**	**-2**	**-4**	**1**	**2**	**-4**	**2**	**-5**
2	**-2**	**-5**	**1**	**5**	**-1**	**-1**	**4**	**1**	**2**	**5**	**-3**	**1**	**4**	**3**	**-2**	**-2**
3	**3**	**-2**	**-2**	**5**	**-4**	**1**	**-4**	**-5**	**3**	**-3**	**-3**	**-3**	**3**	**1**	**5**	**2**
4	**3**	**4**	**1**	**-4**	**-2**	**4**	**4**	**-5**	**2**	**1**	**1**	**3**	**-3**	**-1**	**4**	**2**
5	**-3**	**4**	**3**	**1**	**1**	**-1**	**-1**	**2**	**-4**	**4**	**1**	**2**	**-2**	**3**	**2**	**4**
6	**-4**	**-2**	**-1**	**-3**	**-1**	**-4**	**1**	**2**	**1**	**2**	**-5**	**-3**	**-5**	**-4**	**-2**	**3**
7	**3**	**-3**	**3**	**4**	**4**	**-2**	**2**	**3**	**3**	**5**	**1**	**-4**	**-4**	**1**	**5**	**1**
8	**1**	**1**	**4**	**-3**	**3**	**-4**	**5**	**-1**	**-4**	**1**	**2**	**-5**	**-3**	**-2**	**3**	**-1**
9	**1**	**3**	**-3**	**5**	**2**	**2**	**-1**	**-5**	**-5**	**-3**	**-1**	**-4**	**1**	**1**	**-1**	**-4**
10	**-5**	**-5**	**-3**	**5**	**-4**	**1**	**1**	**1**	**2**	**-5**	**1**	**-2**	**4**	**3**	**5**	**-2**
11	**-5**	**-2**	**-2**	**1**	**1**	**-5**	**4**	**5**	**-3**	**3**	**4**	**1**	**3**	**-2**	**-1**	**-4**
12	**-2**	**-1**	**1**	**2**	**3**	**3**	**1**	**-1**	**-5**	**5**	**-3**	**4**	**-2**	**2**	**1**	**-1**
13	**-1**	**1**	**3**	**4**	**-5**	**1**	**1**	**1**	**-5**	**-4**	**2**	**5**	**-4**	**3**	**-5**	**-2**
14	**-2**	**-3**	**-1**	**-2**	**-5**	**-5**	**5**	**-2**	**4**	**2**	**-1**	**2**	**3**	**1**	**-2**	**3**
15	**-4**	**5**	**-3**	**3**	**-3**	**1**	**-5**	**2**	**2**	**-4**	**-4**	**3**	**-5**	**3**	**1**	**4**
16	**-5**	**-3**	**-1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	**-3**	**-2**	**-4**	**-3**	**-1**	**2**	**-5**
17	**-1**	**-3**	**4**	**-5**	**-1**	**-5**	**5**	**2**	**-5**	**1**	**-2**	**1**	**-3**	**1**	**3**	**-3**
18	**1**	**-4**	**-1**	**-1**	**5**	**-2**	**2**	**-2**	**4**	**-4**	**-2**	**-4**	**-2**	**3**	**2**	**-4**
19	**-5**	**-3**	**3**	**-4**	**3**	**-4**	**4**	**-2**	**3**	**-2**	**4**	**4**	**-1**	**1**	**-2**	**-2**
20	**-1**	**1**	**3**	**-1**	**1**	**4**	**-5**	**1**	**-1**	**-2**	**-3**	**-4**	**-4**	**3**	**-3**	**3**
21	**-3**	**1**	**1**	**1**	**2**	**4**	**-3**	**2**	**-2**	**5**	**3**	**-4**	**-2**	**5**	**-3**	**2**
22	**-3**	**-1**	**-2**	**2**	**1**	**-2**	**2**	**2**	**4**	**4**	**-4**	**1**	**2**	**3**	**5**	**-3**
23	**1**	**-5**	**1**	**-1**	**-4**	**-4**	**-1**	**5**	**4**	**5**	**5**	**4**	**-2**	**-5**	**-3**	**-3**
24	**-5**	**1**	**-1**	**3**	**5**	**4**	**-3**	**4**	**5**	**2**	**2**	**3**	**-2**	**1**	**-5**	**5**
25	**-3**	**1**	**-1**	**-4**	**4**	**-4**	**1**	**3**	**3**	**1**	**5**	**-2**	**3**	**3**	**5**	**1**
26	**-2**	**1**	**-2**	**1**	**3**	**1**	**1**	**4**	**1**	**4**	**-3**	**-5**	**-1**	**-2**	**4**	**2**
27	**3**	**-3**	**-1**	**1**	**-5**	**2**	**-1**	**2**	**5**	**1**	**5**	**4**	**-2**	**-3**	**-2**	**4**
28	**-4**	**1**	**1**	**-5**	**2**	**-3**	**5**	**1**	**-5**	**-5**	**4**	**-5**	**1**	**-1**	**1**	**3**
29	**-4**	**4**	**-3**	**1**	**3**	**4**	**3**	**5**	**1**	**-4**	**4**	**-5**	**3**	**-5**	**1**	**-3**
30	**-1**	**1**	**-5**	**-4**	**4**	**-1**	**3**	**-5**	**5**	**-5**	**4**	**1**	**-3**	**-5**	**-5**	**5**

Задача 1.2. Визначити виродженість матриці та, якщо можливо, знайти обернену матрицю до заданої матриці А

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

№ вар	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	**-3**	**4**	**-4**	**-2**	**-4**	**1**	**4**	**3**	**-1**
2	**-4**	**-4**	**-5**	**1**	**2**	**-2**	**2**	**-5**	**-5**
3	**5**	**4**	**5**	**1**	**1**	**-3**	**-1**	**2**	**1**
4	**3**	**1**	**-2**	**-2**	**3**	**5**	**-2**	**-2**	**-4**
5	**-4**	**-3**	**3**	**1**	**-3**	**1**	**3**	**-3**	**5**
6	**1**	**-1**	**4**	**3**	**-4**	**4**	**4**	**-2**	**-5**
7	**1**	**-3**	**2**	**1**	**-1**	**4**	**1**	**4**	**-3**
8	**1**	**-1**	**-4**	**2**	**-1**	**4**	**1**	**2**	**1**
9	**-2**	**3**	**1**	**3**	**5**	**-1**	**2**	**-4**	**-3**
10	**-4**	**-1**	**-3**	**1**	**2**	**1**	**2**	**-5**	**-4**
11	**3**	**-3**	**4**	**1**	**3**	**-2**	**3**	**4**	**2**
12	**3**	**1**	**5**	**5**	**-4**	**1**	**1**	**5**	**-2**
13	**1**	**1**	**-1**	**4**	**-4**	**-4**	**-3**	**5**	**4**
14	**-5**	**3**	**1**	**-3**	**-1**	**3**	**-2**	**1**	**-3**
15	**1**	**-5**	**-1**	**2**	**-5**	**-4**	**-1**	**-3**	**1**
16	**1**	**-5**	**5**	**-4**	**-5**	**-4**	**-2**	**-3**	**1**
17	**-3**	**1**	**3**	**2**	**-2**	**5**	**-5**	**1**	**-2**
18	**-5**	**1**	**4**	**1**	**1**	**5**	**-2**	**-5**	**-3**
19	**4**	**-2**	**-5**	**4**	**-1**	**-2**	**3**	**1**	**-1**
20	**2**	**1**	**5**	**3**	**-1**	**1**	**3**	**-5**	**4**
21	**1**	**4**	**3**	**1**	**-1**	**4**	**-1**	**-3**	**-5**
22	**1**	**1**	**-4**	**1**	**2**	**3**	**-5**	**5**	**-5**
23	**2**	**-1**	**-5**	**-2**	**-2**	**5**	**1**	**-5**	**-2**
24	**2**	**3**	**3**	**-1**	**2**	**-3**	**2**	**1**	**-4**
25	**-3**	**-2**	**2**	**1**	**-5**	**-4**	**-3**	**2**	**-4**
26	**1**	**4**	**-3**	**3**	**3**	**-1**	**1**	**-5**	**2**
27	**1**	**2**	**-4**	**-4**	**-3**	**-3**	**3**	**-2**	**-1**
28	**1**	**-3**	**-1**	**4**	**4**	**-5**	**-1**	**-5**	**5**
29	**-5**	**3**	**3**	**1**	**-3**	**-3**	**-2**	**1**	**-5**
30	**-4**	**5**	**1**	**-1**	**-2**	**4**	**-1**	**2**	**4**

Задача 1.3. Розв’язати систему рівнянь методом Крамера та матричним методом.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

№ варіанта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	**4**	**-1**	**2**	**3**	**2**	**-2**	**3**	**3**	**-2**	**-11**	**-13**	**-16**
2	**-3**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**	**5**	**-5**	**1**	**6**	**-9**	**7**
3	**-3**	**5**	**-3**	**1**	**1**	**4**	**-2**	**-4**	**4**	**4**	**27**	**-4**
4	**-5**	**-4**	**-2**	**4**	**3**	**-1**	**5**	**1**	**5**	**-9**	**7**	**6**
5	**1**	**-4**	**-5**	**-2**	**-1**	**4**	**2**	**3**	**3**	**6**	**3**	**5**
6	**-3**	**-1**	**1**	**1**	**1**	**-4**	**-5**	**1**	**-3**	**-13**	**4**	**-13**
7	**1**	**3**	**2**	**1**	**-1**	**-1**	**2**	**-4**	**4**	**-1**	**-6**	**8**
8	**2**	**2**	**1**	**2**	**-3**	**-5**	**3**	**4**	**5**	**-1**	**22**	**-13**
9	**-2**	**1**	**-2**	**5**	**3**	**5**	**-1**	**2**	**-3**	**-7**	**23**	**-10**
10	**-3**	**-2**	**1**	**-5**	**2**	**1**	**-2**	**-2**	**-3**	**-10**	**-8**	**-19**
11	**5**	**5**	**1**	**-2**	**1**	**1**	**4**	**-3**	**1**	**23**	**10**	**-16**
12	**4**	**-1**	**3**	**1**	**-4**	**4**	**2**	**5**	**4**	**-8**	**13**	**-26**
13	**-3**	**5**	**2**	**2**	**-1**	**-5**	**-5**	**-3**	**1**	**-19**	**13**	**7**
14	**1**	**3**	**-5**	**5**	**-4**	**-5**	**1**	**-4**	**-3**	**0**	**-19**	**-7**
15	**2**	**-5**	**1**	**-2**	**4**	**1**	**5**	**-2**	**5**	**11**	**-2**	**27**
16	**2**	**2**	**4**	**-2**	**-3**	**-4**	**1**	**2**	**-2**	**4**	**-9**	**15**
17	**-3**	**-2**	**4**	**4**	**-4**	**3**	**-4**	**1**	**-1**	**-25**	**-20**	**3**
18	**-2**	**-5**	**1**	**-5**	**1**	**3**	**4**	**2**	**-3**	**20**	**-4**	**-8**
19	**4**	**-5**	**1**	**1**	**1**	**-5**	**-4**	**2**	**1**	**-3**	**-6**	**5**
20	**4**	**1**	**2**	**1**	**-3**	**1**	**4**	**3**	**-2**	**-19**	**-10**	**-1**
21	**2**	**-1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**3**	**-3**	**-4**	**-1**	**6**	**11**
22	**-4**	**5**	**4**	**-2**	**1**	**5**	**1**	**-2**	**-4**	**-20**	**-22**	**17**
23	**4**	**1**	**-5**	**-3**	**-1**	**2**	**1**	**3**	**-4**	**-27**	**17**	**-15**
24	**3**	**1**	**5**	**2**	**1**	**3**	**4**	**-1**	**-4**	**-6**	**-3**	**15**
25	**1**	**-5**	**5**	**2**	**-5**	**1**	**-2**	**3**	**-3**	**10**	**-2**	**-6**
26	**1**	**-3**	**-4**	**-4**	**4**	**2**	**-5**	**1**	**5**	**-15**	**2**	**2**
27	**-2**	**1**	**-2**	**3**	**2**	**-4**	**1**	**-5**	**-3**	**-5**	**25**	**-7**
28	**3**	**-1**	**1**	**1**	**4**	**3**	**-3**	**-3**	**2**	**-9**	**3**	**-2**
29	**-2**	**-1**	**1**	**1**	**-1**	**1**	**4**	**-5**	**-3**	**-7**	**8**	**19**
30	**-3**	**4**	**-2**	**5**	**-3**	**-5**	**4**	**-2**	**1**	**22**	**-8**	**-21**

Задача 1.4. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

№ вар	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{44}
1	**1**	**6**	**2**	**7**	**3**	**6**	**-1**	**25**	**-4**	**3**	**-1**	**-2**	**5**	**-5**	**-1**	**9**
2	**-1**	**-5**	**7**	**-20**	**-3**	**3**	**-15**	**12**	**2**	**-1**	**8**	**4**	**-1**	**2**	**-7**	**8**
3	**3**	**-2**	**4**	**-11**	**2**	**2**	**-1**	**14**	**-3**	**3**	**5**	**-23**	**-3**	**3**	**-6**	**21**
4	**1**	**-5**	**13**	**-20**	**-2**	**4**	**-14**	**16**	**1**	**1**	**1**	**4**	**-2**	**0**	**-6**	**0**
5	**3**	**0**	**2**	**7**	**4**	**4**	**6**	**14**	**5**	**4**	**7**	**16**	**5**	**-7**	**-6**	**7**
6	**3**	**5**	**-1**	**20**	**-2**	**1**	**-8**	**4**	**1**	**-1**	**5**	**-4**	**1**	**3**	**-3**	**12**
7	**-4**	**-1**	**3**	**-17**	**-1**	**6**	**-7**	**16**	**5**	**7**	**-4**	**33**	**2**	**-6**	**2**	**-8**
8	**-1**	**-3**	**3**	**-12**	**-2**	**1**	**-8**	**4**	**-2**	**4**	**-14**	**16**	**0**	**-1**	**2**	**-4**
9	**2**	**-6**	**-7**	**1**	**-1**	**6**	**-5**	**14**	**4**	**5**	**0**	**22**	**0**	**7**	**5**	**9**
10	**2**	**-5**	**16**	**-20**	**0**	**3**	**-6**	**12**	**-3**	**0**	**-9**	**0**	**-3**	**5**	**-19**	**20**
11	**2**	**0**	**-5**	**11**	**-1**	**2**	**7**	**-6**	**-1**	**-1**	**5**	**-10**	**3**	**-7**	**5**	**18**
12	**0**	**-1**	**2**	**-4**	**2**	**5**	**-4**	**20**	**2**	**2**	**2**	**8**	**-1**	**5**	**-13**	**20**
13	**0**	**5**	**3**	**7**	**-3**	**-4**	**5**	**-22**	**-2**	**-6**	**2**	**-20**	**-3**	**1**	**6**	**-13**
14	**3**	**-5**	**19**	**-20**	**-3**	**-5**	**1**	**-20**	**0**	**1**	**-2**	**4**	**0**	**1**	**-2**	**4**
15	**4**	**5**	**-7**	**29**	**-3**	**-1**	**-5**	**-6**	**-3**	**-2**	**-2**	**-11**	**-2**	**-4**	**-7**	**-7**
16	**0**	**-5**	**10**	**-20**	**1**	**3**	**-3**	**12**	**-3**	**5**	**-19**	**20**	**-2**	**4**	**14**	**1**
17	**-1**	**-4**	**4**	**-15**	**-3**	**4**	**0**	**-1**	**1**	**2**	**-4**	**11**	**-2**	**1**	**2**	**-6**
18	**-3**	**3**	**-15**	**12**	**2**	**-1**	**8**	**-4**	**-2**	**3**	**-12**	**12**	**-3**	**4**	**-17**	**16**
19	**-5**	**3**	**-1**	**-8**	**-3**	**-7**	**4**	**-27**	**0**	**-3**	**-7**	**1**	**2**	**7**	**5**	**15**
20	**0**	**5**	**-10**	**20**	**-2**	**3**	**-12**	**12**	**3**	**-3**	**15**	**-12**	**2**	**5**	**-4**	**20**
21	**-3**	**-2**	**-7**	**-6**	**0**	**-2**	**-7**	**3**	**-4**	**-1**	**0**	**-14**	**2**	**-5**	**3**	**-7**
22	**-1**	**-2**	**1**	**-8**	**3**	**4**	**1**	**16**	**-3**	**-4**	**-1**	**16**	**1**	**-1**	**5**	**-4**
23	**-3**	**3**	**-1**	**-2**	**-1**	**-2**	**-4**	**-3**	**-3**	**5**	**-5**	**6**	**-5**	**-2**	**1**	**-20**
24	**-1**	**-5**	**7**	**-20**	**1**	**0**	**3**	**0**	**-3**	**-1**	**-7**	**-4**	**0**	**-2**	**4**	**-8**
25	**0**	**-4**	**4**	**-12**	**-4**	**1**	**-6**	**-4**	**5**	**-4**	**3**	**4**	**-5**	**-6**	**-1**	**26**
26	**3**	**0**	**9**	**0**	**2**	**1**	**4**	**4**	**2**	**-2**	**10**	**-8**	**2**	**-5**	**16**	**-20**
27	**1**	**0**	**-3**	**6**	**-1**	**-4**	**-7**	**-4**	**0**	**-5**	**-1**	**-9**	**2**	**-3**	**4**	**-4**
28	**5**	**3**	**3**	**18**	**4**	**-4**	**-6**	**10**	**0**	**5**	**5**	**5**	**-5**	**-7**	**0**	**29**
29	**-2**	**7**	**0**	**8**	**1**	**7**	**6**	**11**	**-3**	**-1**	**-3**	**-8**	**-2**	**-7**	**-3**	**-17**
30	**2**	**2**	**-10**	**8**	**1**	**4**	**-5**	**16**	**-3**	**4**	**-17**	**16**	**2**	**-4**	**14**	**-16**

Задача 1.5. Дослідити та розв’язати систему рівнянь. Знайти загальний та базисний розв’язки.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \end{cases}$$

якщо

№ ват	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_1	b_2	b_3
1	**3**	**1**	**-3**	**6**	**1**	**-2**	**-1**	**2**	**4**	**6**	**-4**	**8**	**12**	**-3**	**31**
2	**4**	**12**	**3**	**-8**	**-1**	**-3**	**5**	**2**	**10**	**30**	**-4**	**-20**	**-1**	**6**	**-14**
3	**1**	**-1**	**-1**	**-2**	**2**	**-2**	**-2**	**2**	**9**	**-9**	**-9**	**0**	**1**	**8**	**27**
4	**-2**	**2**	**-2**	**4**	**5**	**-2**	**5**	**-10**	**-12**	**6**	**-12**	**24**	**-10**	**16**	**-42**
5	**-3**	**3**	**3**	**3**	**-2**	**2**	**-4**	**2**	**10**	**-10**	**2**	**-10**	**-15**	**-4**	**38**
6	**2**	**-2**	**-2**	**3**	**-1**	**1**	**1**	**2**	**-4**	**4**	**4**	**1**	**6**	**11**	**16**
7	**-1**	**-2**	**-1**	**2**	**5**	**2**	**5**	**-10**	**-13**	**-10**	**-13**	**26**	**-10**	**18**	**-66**
8	**1**	**1**	**5**	**-1**	**2**	**2**	**1**	**-2**	**1**	**1**	**-4**	**-1**	**18**	**0**	**-18**
9	**1**	**1**	**-2**	**-3**	**5**	**5**	**-10**	**2**	**-8**	**-8**	**16**	**-10**	**0**	**17**	**-34**
10	**-2**	**-4**	**4**	**4**	**-3**	**-1**	**6**	**6**	**2**	**-6**	**-4**	**-4**	**-8**	**-7**	**-2**
11	**-3**	**-6**	**2**	**-9**	**-1**	**-2**	**-3**	**-3**	**5**	**10**	**4**	**15**	**15**	**-6**	**-3**
12	**1**	**-1**	**3**	**-3**	**5**	**-5**	**15**	**-4**	**-11**	**11**	**-33**	**11**	**-7**	**-13**	**33**
13	**-4**	**-1**	**4**	**4**	**3**	**-2**	**-3**	**-3**	**2**	**-5**	**-2**	**-2**	**5**	**-12**	**-19**
14	**5**	**5**	**-1**	**15**	**1**	**1**	**-4**	**3**	**13**	**13**	**5**	**39**	**19**	**0**	**57**
15	**-4**	**-4**	**-12**	**-1**	**1**	**1**	**3**	**5**	**-9**	**-9**	**-27**	**-7**	**-10**	**12**	**-32**
16	**1**	**4**	**-1**	**1**	**1**	**1**	**-1**	**1**	**-2**	**-5**	**2**	**-2**	**0**	**3**	**-3**
17	**-3**	**-9**	**1**	**3**	**-2**	**-6**	**1**	**2**	**-2**	**-6**	**0**	**2**	**-5**	**-3**	**-4**
18	**4**	**-8**	**8**	**-2**	**5**	**-10**	**10**	**-4**	**2**	**-4**	**4**	**-4**	**-8**	**-7**	**2**
19	**1**	**1**	**2**	**3**	**-2**	**3**	**-4**	**-6**	**6**	**-4**	**12**	**18**	**-1**	**12**	**-26**
20	**-2**	**-4**	**5**	**2**	**4**	**8**	**-2**	**-4**	**-6**	**-12**	**-9**	**6**	**16**	**-8**	**0**
21	**5**	**-5**	**5**	**1**	**5**	**-5**	**5**	**-2**	**20**	**-20**	**20**	**-5**	**9**	**-3**	**0**
22	**2**	**2**	**4**	**-4**	**-4**	**3**	**-8**	**8**	**-8**	**-1**	**-16**	**16**	**4**	**13**	**5**
23	**3**	**6**	**4**	**6**	**-1**	**-2**	**5**	**-2**	**7**	**14**	**22**	**14**	**0**	**-19**	**-38**
24	**2**	**2**	**-4**	**-4**	**-3**	**-3**	**6**	**-3**	**-8**	**-8**	**16**	**-2**	**-8**	**-15**	**-22**
25	**-2**	**-2**	**-6**	**-2**	**4**	**2**	**12**	**4**	**-10**	**-8**	**-30**	**-10**	**0**	**2**	**-2**
26	**-2**	**-4**	**-3**	**-6**	**-1**	**-2**	**-4**	**-3**	**0**	**0**	**-5**	**0**	**-13**	**-14**	**-15**
27	**-3**	**-9**	**6**	**1**	**5**	**15**	**-10**	**-2**	**-4**	**-12**	**8**	**1**	**-5**	**8**	**-7**
28	**-2**	**4**	**2**	**-2**	**-4**	**3**	**4**	**-4**	**-8**	**1**	**8**	**-8**	**-10**	**-10**	**-10**
29	**-3**	**-9**	**2**	**-9**	**5**	**15**	**2**	**15**	**11**	**33**	**-6**	**33**	**-13**	**19**	**45**
30	**-3**	**-6**	**-9**	**5**	**-4**	**-8**	**-12**	**-2**	**14**	**28**	**42**	**-6**	**-9**	**14**	**-10**

2.ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Задача 2.1.

Вказані координати вершин піраміди $A_1\ A_2\ A_3 A_4$. Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2;

б) площу грані $A_1\ A_2\ A_3$;

в) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

г) об'єм піраміди $A_1\ A_2\ A_3A_4$

д) направляючі косинуси вектора A_1A_4; $A_4(15;18;21)$

Варіант	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
1	**1**	**-2**	**3**	**3**	**2**	**1**	**6**	**4**	**4**
2	**0**	**0**	**2**	**3**	**0**	**5**	**1**	**1**	**0**
3	**3**	**0**	**5**	**0**	**0**	**2**	**4**	**1**	**2**
4	**1**	**1**	**0**	**4**	**1**	**2**	**0**	**0**	**2**
5	**4**	**1**	**2**	**1**	**1**	**0**	**3**	**0**	**5**
6	**3**	**1**	**0**	**0**	**7**	**2**	**-1**	**0**	**-5**
7	**1**	**-1**	**1**	**0**	**2**	**4**	**1**	**3**	**3**
8	**1**	**-1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**
9	**1**	**-3**	**2**	**5**	**1**	**-4**	**2**	**0**	**3**
10	**3**	**5**	**3**	**-2**	**11**	**-5**	**1**	**2**	**4**
11	**1**	**-2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**1**	**1**	**0**
12	**0**	**0**	**2**	**1**	**1**	**0**	**4**	**1**	**2**
13	**3**	**0**	**5**	**0**	**7**	**2**	**0**	**0**	**2**
14	**1**	**1**	**0**	**0**	**2**	**4**	**3**	**0**	**5**
15	**4**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**-1**	**0**	**-5**
16	**2**	**1**	**1**	**-1**	**0**	**-5**	**1**	**-1**	**1**
17	**5**	**1**	**-4**	**1**	**3**	**3**	**1**	**-1**	**2**
18	**-2**	**11**	**-5**	**1**	**1**	**4**	**1**	**-3**	**2**
19	**4**	**1**	**2**	**2**	**0**	**3**	**3**	**5**	**3**
20	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**	**4**	**1**	**-2**	**3**
21	**4**	**1**	**2**	**5**	**3**	**4**	**2**	**1**	**1**
22	**1**	**4**	**0**	**2**	**7**	**3**	**5**	**1**	**-4**
23	**0**	**7**	**2**	**1**	**2**	**4**	**-2**	**7**	**-5**
24	**0**	**2**	**4**	**1**	**2**	**0**	**4**	**1**	**2**
25	**2**	**1**	**1**	**4**	**1**	**2**	**3**	**1**	**0**
26	**2**	**3**	**1**	**1**	**9**	**4**	**4**	**1**	**2**
27	**4**	**1**	**-4**	**2**	**0**	**3**	**3**	**1**	**0**
28	**-2**	**11**	**-5**	**1**	**2**	**4**	**0**	**7**	**2**
29	**4**	**1**	**2**	**1**	**3**	**0**	**0**	**2**	**4**
30	**1**	**7**	**0**	**4**	**1**	**2**	**2**	**1**	**5**

Задача 2.2. Дано довжини ***a, в, с*** ребер ***OA, OB, OC*** прямокутного паралелепіпеда, знайти:

а) площу трикутника, утвореного діагоналями, які виходять з точки ***O***;

б) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$;

г) довжину діагоналі паралелепіпеда;

д) об'єм піраміди ***OABC***.

Варіант	***a***	***в***	***c***	**Варіант**	***a***	***в***	***c***
1	**4**	**2**	**3**	*16*	**1**	**9**	**3**
2	**3**	**1**	**4**	*17*	**5**	**1**	**4**
3	**3**	**2**	**5**	*18*	**3**	**7**	**5**
4	**2**	**3**	**4**	*19*	**2**	**8**	**4**
5	**5**	**2**	**3**	*20*	**1**	**2**	**9**
6	**4**	**2**	**4**	*21*	**4**	**2**	**6**
7	**3**	**3**	**2**	*22*	**7**	**3**	**9**
8	**2**	**1**	**5**	*23*	**5**	**1**	**5**
9	**6**	**3**	**5**	*24*	**4**	**6**	**5**
10	**2**	**5**	**4**	*25*	**7**	**3**	**4**
11	**1**	**3**	**5**	*26*	**1**	**9**	**5**
12	**3**	**4**	**7**	*27*	**2**	**4**	**7**
13	**5**	**2**	**4**	*28*	**4**	**5**	**8**
14	**3**	**8**	**2**	*29*	**3**	**8**	**2**
15	**1**	**6**	**5**	*30*	**7**	**1**	**5**

Задача 2.3. Дано три послідовні вершини паралелограма ***A,B,C***. **З**найти:

а) координати вершини ***D;*** б) площу трикутника ***ABC***;

в) довжину діагоналі ***AD***; г) кут ***ABC***;

Варіант	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
1	**1**	**-2**	**3**	**3**	**2**	**1**	**6**	**4**	**4**
2	**0**	**0**	**2**	**3**	**0**	**5**	**1**	**1**	**0**
3	**3**	**0**	**5**	**0**	**0**	**2**	**4**	**1**	**2**
4	**1**	**1**	**0**	**4**	**1**	**2**	**0**	**0**	**2**
5	**4**	**1**	**2**	**1**	**1**	**0**	**3**	**0**	**5**
6	**3**	**1**	**0**	**0**	**7**	**2**	**-1**	**0**	**-5**
7	**1**	**-1**	**1**	**0**	**2**	**4**	**1**	**3**	**3**
8	**1**	**-1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**
9	**1**	**-3**	**2**	**5**	**1**	**-4**	**2**	**0**	**3**
10	**3**	**5**	**3**	**-2**	**11**	**-5**	**1**	**2**	**4**
11	**-1**	**2**	**3**	**3**	**4**	**1**	**6**	**-3**	**4**
12	**3**	**1**	**2**	**3**	**0**	**5**	**-1**	**1**	**0**
13	**2**	**0**	**5**	**4**	**0**	**-2**	**4**	**1**	**2**
14	**7**	**1**	**0**	**4**	**1**	**-1**	**2**	**0**	**2**
15	**2**	**1**	**-2**	**-1**	**1**	**0**	**3**	**0**	**5**
16	**2**	**-1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**
17	**5**	**-3**	**2**	**5**	**1**	**-4**	**2**	**0**	**3**
18	**3**	**4**	**3**	**-2**	**11**	**-5**	**-1**	**2**	**4**
19	**2**	**-2**	**3**	**3**	**4**	**1**	**4**	**-3**	**4**
20	**3**	**7**	**2**	**-3**	**-2**	**5**	**6**	**1**	**0**
21	**3**	**5**	**3**	**-2**	**1**	**0**	**3**	**0**	**2**
22	**-1**	**2**	**3**	**3**	**7**	**2**	**-1**	**4**	**5**
23	**3**	**1**	**2**	**3**	**2**	**4**	**1**	**0**	**-5**
24	**2**	**0**	**5**	**4**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**
25	**7**	**3**	**0**	**4**	**1**	**-4**	**2**	**1**	**4**
26	**2**	**1**	**-2**	**-1**	**11**	**-5**	**1**	**0**	**3**
27	**-2**	**-1**	**2**	**2**	**4**	**1**	**6**	**2**	**4**
28	**5**	**-3**	**2**	**5**	**0**	**5**	**-1**	**-3**	**4**
29	**3**	**4**	**3**	**-2**	**8**	**-2**	**4**	**1**	**0**
30	**2**	**-2**	**3**	**3**	**1**	**-1**	**2**	**0**	**2**

Задача 2.4 На векторах $\vec{m} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$, $\vec{n} = c \cdot \vec{j} + d \cdot \vec{k}$, $\vec{p} = r \cdot \vec{i} + l \cdot \vec{k}$ побудовано паралелепіпед ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$ взаємно ортогональні орти). Знайти:

а) об'єм паралелепіпеда***;***

б) площу грані, побудованої на векторах $\overline{m}$ *і* $\overline{p}$;

в) довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{m}$ *і* $\overline{n}$;

Варіант	*a*	*в*	*c*	*d*	*r*	*l*
1	**1**	**-3**	**-1**	**2**	**-4**	**4**
2	**2**	**7**	**4**	**-2**	**-3**	**-4**
3	**4**	**1**	**-5**	**-3**	**-1**	**2**
4	**3**	**1**	**5**	**2**	**1**	**3**
5	**1**	**-5**	**5**	**2**	**-5**	**1**
6	**7**	**-3**	**-4**	**9**	**4**	**2**
7	**1**	**-2**	**1**	**8**	**3**	**-3**
8	**3**	**1**	**-4**	**5**	**1**	**-2**
9	**2**	**2**	**-1**	**2**	**1**	**3**
10	**-5**	**5**	**-4**	**3**	**4**	**-1**
11	**1**	**-2**	**4**	**1**	**-2**	**3**
12	**4**	**-2**	**-3**	**2**	**-5**	**1**
13	**3**	**7**	**-4**	**-4**	**1**	**-5**
14	**1**	**-5**	**1**	**3**	**-3**	**-3**
15	**1**	**1**	**1**	**1**	**4**	**-5**
16	**2**	**1**	**-3**	**-5**	**4**	**-2**
17	**5**	**-2**	**3**	**7**	**3**	**-2**
18	**3**	**9**	**2**	**8**	**-5**	**1**
19	**1**	**4**	**-2**	**-2**	**-4**	**4**
20	**3**	**-1**	**5**	**5**	**1**	**5**
21	**-1**	**4**	**2**	**5**	**3**	**1**
22	**1**	**-4**	**-5**	**-7**	**1**	**-3**
23	**-1**	**-1**	**2**	**2**	**-4**	**4**
24	**-3**	**-5**	**3**	**3**	**4**	**5**
25	**3**	**5**	**-1**	**-1**	**2**	**-3**
26	**2**	**1**	**-2**	**-2**	**-2**	**-3**
27	**5**	**-4**	**3**	**7**	**3**	**-1**
28	**-2**	**6**	**1**	**4**	**-1**	**4**
29	**-2**	**-3**	**3**	**-1**	**1**	**-4**
30	**4**	**-5**	**-1**	**3**	**1**	**-1**

Завдання 2.5 Задано вершини трикутника АВС. Знайти:

а) рівняння сторін трикутника;

б) рівняння медіани ВМ і висоти АД;

в) довжину висоти АД.

Варіант	x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C
1	**3**	**1**	**7**	**-2**	**2**	**-4**
2	**5**	**1**	**6**	**3**	**1**	**5**
3	**1**	**-1**	**4**	**2**	**0**	**4**
4	**1**	**0**	**6**	**0**	**4**	**3**
5	**2**	**1**	**7**	**-2**	**5**	**0**
6	**3**	**4**	**2**	**4**	**0**	**-1**
7	**7**	**9**	**3**	**2**	**1**	**7**
8	**2**	**-1**	**8**	**0**	**3**	**-2**
9	**3**	**0**	**7**	**5**	**-3**	**9**
10	**1**	**4**	**4**	**1**	**-1**	**3**
11	**1**	**6**	**4**	**4**	**-2**	**3**
12	**0**	**7**	**5**	**9**	**4**	**7**
13	**4**	**2**	**0**	**-1**	**2**	**2**
14	**5**	**3**	**1**	**0**	**0**	**3**
15	**0**	**8**	**3**	**4**	**5**	**1**
16	**8**	**-2**	**4**	**1**	**-1**	**1**
17	**-6**	**4**	**3**	**2**	**-2**	**4**
18	**5**	**1**	**6**	**-2**	**1**	**0**
19	**0**	**4**	**7**	**1**	**2**	**3**
20	**8**	**5**	**3**	**7**	**-2**	**5**
21	**3**	**5**	**9**	**4**	**4**	**2**
22	**11**	**2**	**0**	**-3**	**5**	**-1**
23	**10**	**3**	**1**	**-4**	**3**	**1**
24	**-4**	**2**	**5**	**1**	**-3**	**-3**
25	**-4**	**12**	**0**	**-2**	**2**	**7**
26	**3**	**6**	**1**	**-4**	**6**	**-2**
27	**-7**	**2**	**10**	**4**	**5**	**6**
28	**3**	**6**	**4**	**2**	**-1**	**0**
29	**-5**	**0**	**12**	**9**	**7**	**1**
30	**-4**	**7**	**8**	**9**	**6**	**-4**

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Задача 3.1 Знайти границі функції, не користуючись правилом Лопіталя

1/ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$;

2/ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$;

3/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$;

4/ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 6x}{x^2}$;

5/ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+5x)}{x^2+x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$;

6/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}$;

7/ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

8/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} x\cdot ctg5x$;

9/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{\sqrt{-\cos 2x}}}{x}$;

10/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{arctg\,x}$;

11/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{4x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

12/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5+4x+10x^4}{x^4-13+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot ctg\,2x}{\sin x}$;

13/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+3x^3}{5x^3+4x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

14/ а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+5x^4-2x^2}{x^4+3x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$;

15/ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x^2+x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x-\sin\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\pi}{6}}$;

16/ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5+x}{2+x}\right)^{\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}}$;

17/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+4x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{tg\,x}$;

18/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

19/ а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(3x+1)^{50}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

20/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-2x^3+2}{x^4+3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

21/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{2x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

22/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+4x^2+1}{3x^3+x+5}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

23/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{x^2+1+x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

24/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+4}{3x^5+5x^2+1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg\left(\dfrac{\pi-x}{4}\right)\right)^{ctgx}$

25/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x}$

26/ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

27/ а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\cdot(\ln(x+3)-\ln x)$

28/ а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ б) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$

29/ а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$

30/ а) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$

Задача 3.2 Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій

1/ а) $y = arctg\sqrt{1+4x}$; б) $y = \ln\sin(2x+5)$; в) $tg(y/x) = 3x$;

2/ а) $y = x\cdot\sqrt{(1+x^3)\cdot\frac{1}{x}}$; б) $y = e^x(1+ctg\frac{x}{2})$; в) $x - y = -arctgy$;

3/ а) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; б) $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$; в) $y\sin x = \cos(x+y)$;

4/ а) $y = 15\cdot\sqrt[5]{1+x^2}$; б) $y = \sin(\cos^2 x)$; в) $y = \sin(x-y)$;

5/ а) $y = \sqrt[3]{(1+x^2)\ln x}$; б) $y = e^x(x^2 - 3^x)$; в) $(e^x - 1)(e^y - 1) = 1$;

6/ а) $y = tg\ln\frac{1}{x}$; б) $y = 4\sqrt[3]{ctg^2 x}$; в) $x^3 + y^3 = 3xy$;

7/ а) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$; б) $y = \frac{\ln 3\sin x + \cos x}{3^x}$; в) $tg(y/x) = 3x$;

8/ а) $y = arctg\sqrt{1+4x}$; б) $y = \ln\sin(2x+5)$; в) $ctg(y/x) = 3x^3$;

9/ а) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$; б) $y = \sqrt[3]{x^2-1}/\sqrt{x^5}$; в) $x - y = a\sin y$;

10/ а) $y = x^3\ln x$; б) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; в) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$;

11/ а) $y = e^{\cos x}$; б) $y = \left(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\ln x$; в) $x^2 - 2xy - y^2 = 2x$;

12/ а) $y = x\sqrt{1+x^3}$; б) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos x^2}$; в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

13/ а) $y = arctg\sin\sqrt{x}$; б) $y = \frac{(2-x^2)\cdot(x-1)}{1-x^3}$; в) $tg\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

14 а) $y = e^{ctg3x}$; б) $y = \frac{1}{\ln x^2}$; в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

15/ а) $y = e^{-x}\cdot\sin 3x$; б) $y = tgx - \frac{1}{3}ctg^7 3x$; в) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

16/ а) $y = arctge^{2x}$; б) $y = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^2$; в) $y = 2x\cdot arctg\frac{y}{x}$;

17/ а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt[6]{x^7+1}$; б) $y = \frac{\sin^3 x}{\sin x^2}$; в) $y = 3x\cdot arctg\frac{y}{x}$;

18/ а) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$; б) $y = \ln\sin 3x$; в) $tg(\frac{y}{x}) = 3x$;

19/ а) $y = x^5\ln x$; б) $y = e^{-x}\cdot\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$; в) $y\sin x = \cos(x-y)$;

20/ а) $y = 5^{\arcsin x}$; б) $y = \sin(tg^3 x)$; в) $y = \sin(x+y)$;

21/ а) $y = x^{-3}\arcsin\sqrt{\ln x}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $(e^x + 1)(e^y + 1) = 2$;

22/ а) $y = (3-x)\cos 4x$; б) $y = \ln\cos(5x)$; в) $(x^3 - y^3) = 3xy$;

23/ а) $y = ctg3x - x\cos\pi$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; в) $\ln y = arctg\frac{x}{y}$;

24 а) $y = 6^{2x}\cos x$; б) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin 3x}$; в) $x - y = arctgy$;

25/ а) $y=\dfrac{x\ln x}{x-1}$; б) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$; в) $x+y+e^{y}arctgx=0$;

26/ а) $y=arctg\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^{2}}}$; б) $y=2^{tg\frac{1}{x}}$; в) $a+y=a\sin y$;

27 а) $y=x\sqrt{\arcsin x}$; б) $y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2(1+x)}$; в) $y^{2}x=e^{\frac{y}{x}}$;

28/ а) $y=x^{2}\sin x^{3}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$; в) $x^{2}+2xy+y^{2}=2x$;

29/ а) $y=2^{x}e^{-x}$; б) $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^{3}}}$; в) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a}$;

30/ а) $y=5^{2x}\sin x$; б) $y=\lg^{3}x^{2}$; в) $y=5xarctg\dfrac{y}{x}$;

Задача 3.3 Дослідити функцію за допомогою диференціального числення та побудувати її графік.

1/ а) $y=\dfrac{x^{2}+1}{2}$; б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

2/ а) $y=\dfrac{1}{1+x^{2}}$; б) $y=xe^{-x}$;

3/ а) $y=\dfrac{(x-1)^{2}}{x^{2}+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$;

4/ а) $y=\dfrac{x^{3}+1}{x^{2}}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

5/ а) $y=\dfrac{x}{3-x^{2}}$; б) $y=x\ln x$;

6/ а) $y=\dfrac{1}{1-x^{2}}$; б) $y=\ln(x^{2}-4)$;

7/ а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2}$; б) $y=\ln(2x^{2}+3)$;

8/ а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^{2}}$; б) $y=\dfrac{e^{x}}{x}$;

9/ а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^{2}}$; б) $y=x^{3}e^{-x}$;

11/ а) $y=\dfrac{x^{3}}{(x+1)^{2}}$; б) $y=x+\ln(x^{2}-1)$;

12/ а) $y=\dfrac{3x^{2}-7x-16}{x^{2}-x-6}$; б) $y=\ln(1+x^{2})$;

13/ а) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$;

14/ а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$;

15/ а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; б) $y=xe^{-x^2}$;

16/ а) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$; б) $y=(x+4)e^{2x}$;

17/ а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$; б) $y=\ln(x^2+2x+2)$;

18/ а) $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$; б) $y=xe^{2x-1}$;

19/ а) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$;

20/ а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$;

21/ а) $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$; б) $y=(x-1)e^{3x+1}$;

22/ а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; б) $y=\ln(x^2-4x+8)$;

23/ а) $y=\dfrac{2x^2}{4x^2-1}$; б) $y=x^2e^{-2x}$;

24/ а) $y=\dfrac{2x+1}{x^2}$ б) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$;

25/ а) $y=\dfrac{1}{x-9}$; б) $y=x^2-2\ln x$;

26/ а) $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$; б) $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$;

27/ а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=\ln(x^2+4x)$;

28/ а) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=e^{2x-x^2}$;

29/ а) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

30/ а) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$; б) $y=e^{\frac{1}{3-x}}$;

РОЗДІЛ 9 Довідковий матеріал

Матриці. Системи лінійних рівнянь

	Назва матриці	Вигляд матриці
	1	2
1.	**Прямокутна**, розмір $m \times n$	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, або $\mathrm{A}_{m\times n} = (a_{ij})$
2.	**Транспонована** по відношенню до матриці А	$\mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$
3.	**Квадратна,** порядку *n*	$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
4.	**Приєднана** до квадратичної матриці А	$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$
5.	**Обернена** до квадратичної матриці А	$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A}$
6.	**Нульова**	$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$
7.	**Одинична**	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$

8.	**Діагональна**	$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
9.	**Верхня трикутна**	$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
10.	**Нижня трикутна**	$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$
11.	**Трапецієвидна**	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & a_{rr-1} & \ldots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ $a_{ii} \neq 0,\ при\ i=\overline{1,r}$
12.	**Блочна**	$A=\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}, B, C, D, F - матриці$
13.	**Квазідіагональна**	$A=\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}, A, B, C, -матриці$ O - нульова матриця
14.	**Квазітрикутна**	$A=\begin{pmatrix} A & b & C \\ O & D & F \\ O & O & G \end{pmatrix}, A, B, C, D, F, G - матриці$ O - нульова матриця

Різновиди систем лінійних рівнянь, їх сутність та розв’язки

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Загальна система лінійних алгебраїчних рівнянь	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \quad \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$
Основна матриця системи	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Матриця-стовпець вільних членів	$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
Матриця-стовпець невідомих	$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Матрична форма запису системи	$AX = B$
Розширена матриця системи	$\overline{A} = (A/B) = \left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$
Умова сумісності системи	$RgA = Rg\overline{A}$
Система має єдиний розв’язок	$RgA = Rg\overline{A} = r = n$
Система має безліч розв’язків	$RgA = Rg\overline{A} = r < n$
Система несумісна	$RgA \neq Rg\overline{A}$

Квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь	$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n = & b_1; \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & + a_{2n}x_n = & b_2; \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 & \dots & + a_{nn}x_n = & b_n. \end{cases}$
Квадратна система має єдиний розв'язок	$\det A \neq 0$
Квадратна система має безліч розв'язків	$\det A = 0, \;\; RgA = Rg\overline{A} = r < n$
Квадратна система несумісна	$\det A = 0, \;\; RgA \neq Rg\overline{A}$
Однорідна система рівнянь	$AX = 0$
Однорідна система має тільки нульовий розв'язок	$RgA = n$
Однорідна система має нетривіальні розв'язки	$RgA = r < n$
Квадратна однорідна система має тільки нульовий розв'язок	$\det A \neq 0$
Квадратна однорідна система має нетривіальні розв'язки	$\det A = 0$

Основні формули векторної алгебри.

Величини або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Сума векторів	$\bar{a}+\bar{b}=(a_x+b_x)\bar{i}+(a_y+b_y)\bar{j}+(a_z+b_z)\bar{k}$
Добуток вектора на число	$\alpha\cdot\bar{a}=\alpha a_x\bar{i}+\alpha a_y\bar{j}+\alpha a_z\bar{k}$
Скалярний добуток вектора	$(\bar{a},\bar{b})=\bar{a}\bar{b}=\lvert\bar{a}\rvert\lvert\bar{b}\rvert\cos\varphi;$ $(\bar{a},\bar{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
Векторний добуток векторів	$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$
Мішаний добуток векторів	$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$
Подвійний векторний добуток	$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}(\bar{a}\bar{c})-\bar{c}(\bar{a}\bar{b});$ $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=\bar{b}(\bar{a}\bar{c})-\bar{a}(\bar{b}\bar{c}).$
Довжина вектора	$\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{(\bar{a},\bar{a})}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$
Відстань між точками $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ та $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$	$p(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$
Кут між векторами	$\cos\varphi=\dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{\lvert\bar{a}\rvert\ \lvert\bar{b}\rvert};$ $\cos\varphi=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$

1	2
Координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні λ	$\bar{r} = \dfrac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1+\lambda};$ $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$
Площа паралелограма та трикутника побудованих на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$	$S_{пар} = \left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\|; \quad S_{тр} = \dfrac{1}{2}\left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\|.$
Об'єм паралелепіпеда та піраміди, побудованих на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$	$V_{парал} = \left\|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right\|; \quad V_{тр} = \dfrac{1}{6}\left\|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right\|.$
Колінеарність та ортогональність двох векторів	$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = 0, \quad \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z};$ $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0,$ $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$
Компланарність трьох векторів	$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0; \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$
Формули перетворення координат на площині	
Паралельний перенос початку системи координат у точку *(a, b)*	$\begin{cases} x_1 = x - a \\ y_1 = y - b, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_1 + a \\ y = y_1 + b. \end{cases}$
Поворот системи координат на кут α	$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha. \end{cases}$
Загальні формули (паралельний перенос та поворот)	$\begin{cases} x_1 = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha \\ y_1 = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha, \end{cases}$ $\begin{cases} x = a + x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \\ y = b + x_1\sin\alpha + y_1\cos\beta. \end{cases}$

Основні формули аналітичної геометрії

Пряма на площині

	Вигляд рівняння прямої l	Назва рівняння	Пояснення
1.	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\ (x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\bar{n}$	$\bar{n}\perp l;\ \bar{n}=(A,B),\ M_0\in l.$
2.	$Ax+By+C=0$	Загальне рівняння	$\bar{n}\perp l;\ \bar{n}=(A,B)$
3.	$y=kx+b$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт, $\alpha=(l\hat{,}Ox)$; точка $(0,b)\in l.$
4.	$y-y_0=k(x-x_0)$	Рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт k та проходить через задану точку	$M_0(x_0,y_0)\in l;$ $k=tg\alpha,\ \alpha=(l,\wedge Ox).$
5.	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$	Канонічне рівняння прямої	$M_0(x_0,y_0)\in l,$ $\bar{s}\parallel l;\ \bar{s}=(m,n).$
6.	$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+mt.\end{cases}$	Параметричне рівняння прямої	$M_0(x_0,y_0)\in l,$ $\bar{s}\parallel l;\ \bar{s}=(m,n), t\in R.$
7.	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	Рівняння прямої у відрізках	Точки $(a,0),\ (0,b)\in l.$
8.	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_2}{y_2-y_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки	$M_1(x_1,y_1)\in l,$ $M_2(x_2,y_2)\in l.$
9.	$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$	Нормальне рівняння прямої	$\bar{n}=(\cos\alpha,\cos\beta), \bar{n}\perp l,$ $p=\rho(O,l)\ge 0.$

Відстань від точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямої l	
$l:\ Ax+By+C=0$	$\rho(M_0,l)=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}.$
$l:\ x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$	$\rho(M_0,l)=\lvert\ x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta-p\ \rvert$

Кут між прямими l_1 та l_2 на площині	
$L_1 : y = k_1 x + b_1$ $L_2 : y = k_2 x + b_2$	$tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$
$L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ $L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{\lvert\bar{n}_1\rvert \, \lvert\bar{n}_2\rvert} = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$

Паралельність та перпендикулярність прямих l_1 та l_2 на площині		
	$l_1 \parallel l_2$	$l_1 \perp l_2$
$L_1 : y = k_1 x + b_1$ $L_2 : y = k_2 x + b_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 k = -1.$
$L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ $L_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$	$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0;$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}.$	$(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0;$ $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$
$L_1 : \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}$ $L_2 : \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}$	$\bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = 0;$ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}.$	$(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = 0;$ $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$

Площина у просторі.

	Вигляд рівняння прямої P	Назва рівняння	Пояснення
1.	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	Рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\bar{n}$	$M_0(x_0, y_0, z_0) \in P,$ $\bar{n} \perp P;\ \bar{n} = (A, B, C)$
2.	$Ax + By + Cz + D = 0$	Загальне рівняння	$\bar{n} \perp P;\ \bar{n} = (A, B, C)$
3.	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$	Рівняння площини у відрізках	*Точки* $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c) \in P.$
4.	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	Рівняння площини, що проходить через задані точки M_1, M_2, M_3	$M_1(x_1, y_1, z_1) \in P,$ $M_2(x_2, y_2, z_2) \in P,$ $M_3(x_3, y_3, z_3) \in P.$

5.	$P: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$	Нормальне рівняння площини	$\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\bar{n} \perp P$, $p = \rho(O, l) \geq 0$.
Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини P			
$P: Ax + By + Cz = 0$	$\rho(M_0, P) = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.		
$P: x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$	$\rho(M_0, P) = \lvert\, x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\,\rvert$.		
Кут між прямими P_1 та P_2			
$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{\lvert\bar{n}_1\rvert\,\lvert\bar{n}_2\rvert} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.		
Паралельність та перпендикулярність площин P_1 та P_2			
	$P_1 \parallel P_2$	$P_1 \perp P_2$	
$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0$; $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.	$(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$; $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$	

Пряма у просторі.

	Вигляд рівняння прямої l	Назва рівняння	Пояснення
1.	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_1x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$	Загальне рівняння прямої	Пряма визначається перетином двох непаралельних площин
2.	$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$	Параметричні рівняння прямої	Точка $A_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, $\bar{s} \parallel l$; $\bar{s} = (m, n, p)$, $t \in R$.
3.	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$	Канонічні рівняння прямої	$A_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, $\bar{s} \parallel l$; $\bar{s} = (m, n, p)$.
4.	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки M_1, M_2	$M_1(x_1, y_1, z_1) \in L$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L$.

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини L	
$L: \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_2}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$\rho(M_0, L) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}_0 \times \bar{s}\right\|}{\left\|\bar{s}\right\|},$ $A(x_1, y_1, z_1) \in L, \quad \bar{s} = (m, n, p).$
Кут між прямими l_1 та l_2	
$L_1 = \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ $L_2 = \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$	$\cos\varphi = \dfrac{(\bar{s}_1, \bar{s}_2)}{\left\|\bar{s}_1\right\| \left\|\bar{s}_2\right\|} = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$
Кут між прямою l та площиною Q	
$L = \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ $Q: Ax + By + Cz + D = 0$	$\sin\varphi = \dfrac{\left\|Am + Bn + Cp\right\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$
Відстань від двома мимобіжними прямими	
$L_1 = \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ $L_2 = \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$	$\rho(L_1, L_2) = \dfrac{\left\|(\overrightarrow{A_1A_2}, \bar{s}_1, \bar{s}_2)\right\|}{\left\|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2\right\|};$ $A_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1, \quad A_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2,$ $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad \bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2).$
Паралельність та перпендикулярність прямих l_1 та l_2		
	$l_1 \parallel l_2$	$l_1 \perp l_2$
$L_1 = \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ $L_2 = \dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$	$\bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = 0;$ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}.$	$(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = 0;$ $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 =$
Паралельність та перпендикулярність прямої l та площини Q		
	lQ	$l \perp Q$
$L = \dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ $Q: Ax + By + Cz + D = 0$	$\bar{s}, \bar{n} = 0;$ $Am + Bn + Cp = 0.$	$\bar{s}, \bar{n} = 0;$ $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

Криві другого порядку.

	Назва кривої	Канонічне рівняння
1.	Коло	$x^2 + y^2 = r^2$
2.	Еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3.	Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$
4.	Парабола	$y^2 = 2px, \quad p > 0$

Поверхні другого порядку.

	Назва кривої	Канонічне рівняння
1.	Сфера	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
2.	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
3.	Гіперболоїди: а) однопорожнинний гіперболоїд: б) двопорожнинний гіперболоїд:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
4.	Параболоїди: а) еліптичний параболоїд: б) гіперболічний параболоїд:	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad pq > 0$ $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad pq > 0$
5.	Циліндри: а) еліптичний: б) гіперболічний: в) параболічний:	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \forall_z$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \forall_z$ $y = 2px, \ \forall_z$
6.	Канонічна поверхня	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Число e	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
Границя суми, добутку, частки за умови: $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\exists\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x),\ \ c = const,$ $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x),$ $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x),$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0.$
Перша чудова границя	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
Наслідки з першої чудова границі	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1,\qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = 1.$
Друга чудова границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
Наслідки з другої чудова границі	$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a},\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$
Еквівалентні нескінченно малі	$x\sim\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim arctgx\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$ $x\to 0$
	$u(x)\sim\sin u(x)\sim tgu(x)\sim\arcsin u(x)\sim arctgu(x)\sim\ln(1+u(x))\sim e^{u(x)}-1$ $u(x)\to 0$ при $x\to a$
	$a^x-1\sim x\ln a,\quad \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a},$ $(1+x)^\mu-1\sim\mu x$ при $x\to 0$

1	**2**
Еквівалентні нескінченно великі	$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0 x^n$. при $x \to \infty$
Таблиця визначеностей	1) $\frac{c}{0} = \infty,\ c \neq 0$, 2) $\frac{\infty}{0} = \infty$, 3) $\frac{c}{\infty} = 0$, 4) $\frac{0}{\infty} = 0$, 5) $c \cdot \infty = \infty,\ c \neq 0$, 6) $\infty \cdot \infty = \infty$, 7) $\infty + \infty = \infty$, 8) $0^{\infty} = 0$, 9) $\infty^{\infty} = \infty$
Типи невизначиностей	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{0 \cdot \infty\}$ $\{\infty - \infty\}$ $\{\infty\}$ $\{\infty^0\}$ $\{0^0$
Неперервність функції в точці $x=a$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(\Delta x) = 0$ $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$
Розрив першого роду а) усувний	$\exists f(a+0),\ f(a-0)$ $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$ або $f(a+0) = f(a-0)$, якщо функція $f(x)$ невизначена при $x=a$
б) стрибок	$f(a+0) \neq f(a-0)$
Розрив другого роду	Хоча б одна з границь $f(a+0),\ f(a-0)$ не існує або дорівнює нескінченності.

Основні формули диференціального числення

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Похідна	$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
Диференціал	$dy = y' \cdot \Delta x$ або $dy = y' \cdot dx$
Похідна *n*-го порядку	$\dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \left(f^{n-1}(x)\right)'$
Формула Лейбніца	$(u \cdot v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{n-k} v^{(k)}.$ Тут $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v,\ C_n^k$ - число комбінацій з *n* по *к*, $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!}$
Основні правила диференціювання	

1. $C' = 0$
2. $(Cu)' = Cu'$
3. $(u \pm v) = u' \pm v'$
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0$
6. $f((u))'_x = f_u' \cdot u_x'$
7. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, де *x=x(y)* – обернена функція для функції *y=y(x)*

Тут *C* – стала, $u = u(x),\ v = v(x).$

Правило диференціювання добутку *n* функцій

$u = u(x),\ v = v(x),\ w = w(x), \ldots z = z(x)$

$(u \cdot v \cdot w \ldots z)' = u' \cdot v \cdot w \ldots z + u \cdot v' \cdot w \ldots z + \ldots + u \cdot v \cdot w \ldots z'.$

Основні формули диференціювання

1. $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \quad \alpha \in R$
2. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
3. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11. $(\arccos\ u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12. $(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13. $(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
14. $(sh\ u)' = ch\ u \cdot u'$
15. $(ch\ u)' = sh\ u \cdot u'$
16. $(th\ u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
17. $(cth\ u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

Тут $u = u(x)$. Якщо $u(x) = x, \ mo\ u'(x) = x' = 1.$

Похідні від функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$	$y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'} \qquad y_{xx}'' = \dfrac{(y_x')_t'}{x_t'}$
Диференціал n-го порядку	$d^n y = d(d^{n-1} y)$

Застосування похідної

Поняття або співвідношення, що визначаються	Формула
1	2
Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0,\ y_0)$	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$
Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0,\ y_0)$	$y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
Кут між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину $(x_0,\ y_0)$	$tg\varphi = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$
При прямолінійному русі точки з законом руху $s = s(t)$: швидкість v, прискорення a	$v = s'(t)$ $a = s''(t)$
Формула Коші (відношення скінчених приростів)	$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)},\ \ c \in (a, b)$
Формула Лагранжа (формула скінчених приростів)	$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),\ \ c \in (a, b)$
Формула Тейлора для функції $f(x)$ з центром розкладу в точці $x = a$	$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x)$
Залишковий член у формулі Лагранжа	$R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ $\xi = a + \theta(x - a),\ \ 0 < \theta < 1$

Залишковий член у формі Пеано	$R_n(x) = 0((x-a)^n),\ \ x \to a$
Формула Маклорена (Тейлора при $a=0$)	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$

Основні розклади функції за формулою Маклорена
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$$
$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$
$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$
Екстремуми функції
Необхідна умова локального екстремуму функції $f(x)$ в точці x_0
$f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує
Достатні умови локального екстремуму в точці x_0
I правило $f'(x)$ змінює знак з «+» на «-» в околі $O(x_0, \delta) \Rightarrow \ \ f(x_0) = y_{\max}$, $f'(x)$ змінює знак з «-» на «+» в околі $O(x_0, \delta) \Rightarrow \ \ f(x_0) = y_{\min}$, $f'(x)$ не змінює знак в околі $O(x_0, \delta) \Rightarrow \ \ f(x_0) \neq y_{\max}, \ \ f(x_0) \neq y_{\min}$ II правило $f''(x_0) < 0 \ \Rightarrow f(x_0) = y_{\max}$ $f''(x_0) < 0 \ \Rightarrow f(x_0) = y_{\min}$ $f''(x_0) = 0 \ \Rightarrow$ потрібне додаткове дослідження.

Основні формули елементарної математики

Властивості степенів

Для будь-яких *x, y* та додатних *a, b* мають місце такі рівності:

$$a^0 = 1,\ a \neq 0; \qquad (ab)^x = a^x b^x;$$
$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$
$$a^x : a^y = a^{x-y}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$
$$(a^x)^y = a^{xy};$$

Многочлени

Для будь-яких *a, b, c* мають місце такі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $x_{1.2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Для $n \in N$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Якщо *n*- парне,

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Якщо *n*- непарне,

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних *n, k*, більших одиниці, та будь-яких невід'ємних *a, b* мають місце такі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a; \quad (a \geq 0)$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \ , \text{ якщо } \ 0 \leq a < b$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0 \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0)$$

Тригонометричні функції

(У всіх формулах, наведених нижче, слід враховувати область припустимих значень лівої та правої частини формули)

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$tgx + ctgx = 1;$$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формули додавання

$$\sin(x + y) = \sin x \ \cos y + \cos x \ \sin y;$$

$$\sin(x - y) = \sin x \ \cos y - \cos x \ \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \ \cos y - \sin x \ \sin y;$$

$$\cos(x - y) = \cos x \ \cos y + \sin x \ \sin y;$$

$$tg(x + y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \ tgy};$$

$$ctg(x + y) = \frac{ctgx \ ctgy - 1}{ctgx + ctgy};$$

$$tg(x - y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx \ tgy};$$

$$ctg(x - y) = \frac{ctgx \ ctgy - 1}{ctgy - ctgx}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x = 2\sin x \ \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$tg\,2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}; \qquad ctg\,2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}.$$

Формули половинного аргументу

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \qquad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$$

$$tg^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; \qquad ctg^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x};$$

$$tg \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}; \qquad ctg \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x};$$

Формули зниження степеня

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2};$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right);$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

$$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \ \cos y}; \qquad ctgx + ctgy = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \ \sin y};$$

$$tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \ \cos y}; \qquad ctgx - ctgy = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x \ \sin y}.$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}};$$

$$tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}; \qquad ctgx = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}.$$

Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на подібну			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	sin *a*	-sin *a*	cos *a*	cos *a*	-cos *a*	-cos *a*
cos	$\cos\alpha$	-cos *a*	-cos *a*	sin *a*	-sin *a*	-sin *a*	sin *a*
tg	$-tg\alpha$	-tg *a*	tg *a*	ctg *a*	-ctg *a*	ctg *a*	-ctg *a*
ctg	$-ctg\alpha$	-ctg *a*	ctg *a*	tg *a*	-tg *a*	tg *a*	-tg *a*

Значення тригонометричних функцій

Значення кута α		Функції			
град	рад	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0^0	0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180^0	π	0	-1	0	∞
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
360^0	2π	0	1	0	∞

Властивості обернених тригонометричних функцій

$\arcsin(-a)=-\arcsin a,\ \ |a|\le 1;$

$\arccos(-a)=\pi-\arccos a,\ \ |a|\le 1;$

$arctg(-a)=-arctga,\ \ a\in R;$

$arcctg(-a)=\pi-arcctga,\ \ a\in R;$

$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2},\ \ |a|\le 1;$

$arctga+arcctga=\frac{\pi}{2},\ \ a\in R.$

Розв'язки найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Розв'язки рівняння
$\sin x = a, \quad \lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$
$\cos x = a, \quad \lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$
$tgx = a, \quad a \in R$	$x = arctga + \pi n, \quad n \in Z$
$ctgx = a, \quad a \in R$	$x = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$

Окремі розв'язки тригонометричних рівнянь

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi n, \quad n \in Z$$

$$\sin x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\cos x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Властивості логарифмів

1^0. Основна логарифмічна тотожність:

$$c = a^{\log a\, c} \quad c > 0, \quad a > 0, \, a \neq 1.$$

2^0. Логарифм основи дорівнює одиниці:

$$\log_a a = 1.$$

3^0. Логарифм одиниці дорівнює нулю:

$$\log_a 1 = 0.$$

4^0. Формула для логарифма добутку:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

5^0. Формула для логарифма частки:

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0.$$

6^0. Формула для логарифма степеня:

$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad x > 0, \quad p \in R.$$

7^0. Формула переходу до нової основи логарифма:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0, \quad b \in R, \ b > 0, \ b \neq 1.$$

Зокрема,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Прогресії

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_{n-1} + d, \ n \geq 2$ де d - різниця прогресії	$b_n = b_{n-1}$ q, $n \geq 2$ де q - знаменник прогресії
Формула *n*-го члена прогресії	
$a_n = a_1 + (n-1)d$ $n = 1,2,\ldots$	$b_n = b_1 q^{n-1}$ $n = 1,2,\ldots$
Формула суми перших *n* членів	
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \ q \neq 1$
Формула для різниці	Формула для знаменника
$d = a_n - a_{n-1}, \ n \geq 2$	$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}, \ n \geq 2$
Сума натуральних чисел від 1 до *n*	Сума нескінченно спадної геометричної прогресії
$S = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = \frac{b_1}{1-q}, \ \lvert q \rvert < 1$

Основні формули комбінаторики. Біном Ньютона

Число перестановок з n елементів знаходиться за формулою:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n = n!, \qquad 0! = 1.$$

Число розміщень з n елементів по *m* елементів знаходиться за формулою:

$$A_n^m = (n-1)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число комбінацій з n елементів по *m* елементів знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}.$$

або

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Властивості комбінацій:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m-1}.$$

Формула бінома Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

Сума біноміальних коефіцієнтів $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n.$

Числові значення деяких величин

Позначення величини	Числове значення	Позначення величини	Числове значення
π	3,14159	e	2,71828
2π	6,28318	$1/e$	0,36788
$\pi/2$	1,57080	e^2	7,38906
$\pi/3$	1,04720	$\sqrt{e}$	1,64872
$\pi/4$	0,78540	$\lg e$	0,43429
$\pi/6$	0,52360	$\ln 10$	2,30258
$1/\pi$	0,31831	1 радіан	$57^{\circ}17'45''$
π^2	9,86960	1^0 (град)	0.0174 (рад)
$\sqrt{\pi}$	1,77245	$\sqrt{2}$	1,41421
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	$\sqrt{3}$	1,73205

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугір М.К. Математика для економістів. К.: ”Академія”, 1998.- 272с.
2. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник/ За редакцією В.П.Дубовика, І.І.Юрика.-К.:Вища школа, 1999-480с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.:Вища шк., 1993. – 648с.
4. Дюженкова Л.І., Носаль Т.В. Вища математика. Практикум: Навчальний посібник. - К.: Вища школа, 1991. – 407с.
5. Збірник задач з вищої математики / За ред.. Ф.С. Гудименка. – К.: КУ, 1967. – 352с.
6. Пак В.В., Косенко Й.Л. Вища математика.-К.: Либідь, 1996. 440с.
7. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К.:Вища шк., 1986. – 512с.
8. Беклемышев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.:Наука, 1987.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов.: В 3-х томах. – М.:Наука, 1985.