ДЕРЖАВНА СЛУЖБА СТАТИСТИКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ СТАТИСТИКИ, ОБЛІКУ ТА АУДИТУ

КАФЕДРА СТАТИСТИКИ, ІТ ТА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ЕКОНОМІЦІ

ЗАТВЕРДЖУЮ
Перший проректор
з науково-педагогічної роботи
_____ С.А. Супруненко
«___» _____ 2024 року

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

ЕКОНОМЕТРИКА

для студентів спеціальностей **051 “Економіка”, 072 “Фінанси, банківська справа та страхування”**

Освітньої програми **“Прикладна статистика та бізнес-аналітика”**
факультету **обліково--статистичного**

Київ
2024 рік

Методичні рекомендації для підготовки до лабораторних робіт з дисципліни «Економетрика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня галузі знань / Укладач О.В. Ставицький. Київ: НАСОА, 2024. 58 с.

Укладач: Ставицький О.В., доцент кафедри статистики, ІТ та математичних методів в економіці, к.е.н., доцент.

Рецензенти: д.е.н., с.н.с. Пішеніна Т. І., завідувач кафедри економіки та підприємництва Київського інституту бізнесу та технологій;

к.ф.-м.н., доц. Дереглазов Л.В., доцент кафедри статистики, ІТ та математичних методів в економіці НАСОА.

Затверджено на засіданні кафедри статистики, ІТ та математичних методів в економіці
Протокол від «28» серпня 2024 року № 1

Схвалено Вченою радою обліково-статистичного факультету НАСОА
Протокол від «30» серпня 2024 року № 1

©Ставицький О.В.
©НАСОА, 2024 рік

ВСТУП

Мета навчальної дисципліни – формування системи фундаментальних знань щодо методів оцінювання параметрів залежностей, які характеризують кількісні взаємозв'язки між економічними величинами.

Завдання дисципліни – вивчення економетричних методів та моделей, набуття вмінь використання їх у практиці управління економічними процесами на різних ієрархічних рівнях національної економіки.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати

- економетричні методи, необхідні для перевірки та виявлення нових емпіричних залежностей, побудови надійного прогнозу;
- принципи кількісного аналізу економічних процесів;
- принципи емпіричного виведення економічних залежностей;
- ступінь і характер впливу окремих факторів на економічні показники.

вміти

- створювати економетричні моделі економічних процесів з використанням комп'ютерної техніки;
- оцінювати параметри економетричних моделей з метою пояснення поведінки досліджуваних економічних процесів;
- перевіряти гіпотези про властивості економічних показників і форми їх зв'язку;
- оцінювати та використовувати результати економічного аналізу для прогнозу та прийняття обґрунтованих економічних рішень.

ЗМІСТ ТА ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1. Вступ до економетрики

Лабораторна робота 1. Формалізація вхідних даних для побудови економетричної моделі.

Мета: навести власний приклад вхідних даних для побудови економетричної моделі та їх формалізації.

Завдання 1.1.

Дайте відповіді на теоретичні питання.

Необхідно: Дайте відповідь на 2 питання за Вашим варіантом відповідно табл.1.1.:

1. Поняття економетрики. Історичні відомості, засновники економетрики.
2. Об'єкт економетрики, предмет економетрики, мета економетричного дослідження, завдання економетрики.
3. Класифікація задач, які допомагає вирішувати економетрика (за рівнем ієрархії економічної системи).
4. Класифікація економетричних моделей за способом врахування часу, за рівнем агрегування змінних, за способом відображення змінних.
5. Основні етапи економетричного моделювання.

Варіант 1. Дати відповідь на питання 1,2.

Варіант 2. Дати відповідь на питання 4,5.

Варіант 3. Дати відповідь на питання 2,4.

Варіант 4. Дати відповідь на питання 1,3.

Варіант 5. Дати відповідь на питання 3,5

Варіант для завдання 1 обирається в табл. 1 за Вашим номером за списком у журналі.

Таблиця 1.1. Вибір номерів варіантів

	Остання цифра за списком									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1
6	2	3	4	5	1	2	3	4	5	2
7	3	4	5	1	2	3	4	5	1	3
8	4	5	1	2	3	4	5	1	2	4
9	5	1	2	3	4	5	1	2	3	5

Завдання 1.2.

Дослідження лінійної кореляційної моделі.

Необхідно: Виконати лабораторну роботу № 1 “Лінійна кореляційна модель”:

Дані спостережень (X,Y) для виконання наведені в табл.. 2, де N - Ваш номер за списком у журналі.

Таблиця 2.

№	**X**	**Y**
1	200 +N	50 +2*N
2	210 +N	52 +2*N
3	205 +N	51+2*N
4	220 +N	55 +2*N
5	225 +N	56 +2*N
6	220 +N	54 +2*N
7	230 +N	60 +2*N
8	228 +N	58+2*N
9	240 +N	62 +2*N
10	250 +N	64 +2*N
11	255 +N	65 +2*N
12	260 +N	67+2*N

Пояснення до виконання

За даними спостережень (X,Y) табл. 2 потрібно:

а) оцінити параметри (коефіцієнти регресії) лінійної моделі:

$$Yp = b0 + b1*X$$

за відомими формулами:

$$b1 = Rxy * Sy / Sx,$$

$$b0 = Ycp – b1 * Xcp,$$

де Rxy – коефіцієнт парної кореляції

$$Rxy = Sxy / (Sx * Sy);$$

де Sxy , Sx , Sy – коваріація і стандартні відхилення:

$$Sxy = (XY)cp – (Xcp) * (Ycp),$$

$$Sxx = (XX)cp – (Xcp)^2,$$

$$Syy = (YY)cp – (Ycp)^2,$$

$$Sx = КОРЕНЬ(Sxx), Sy = КОРЕНЬ(Syy);$$

б) побудувати графік знайденої залежності разом з емпіричними точками;

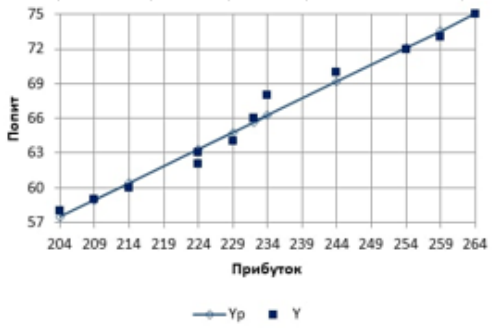
в) дати інтерпретацію отриманим результатам;

г) оформити роботу у вигляді звіту на робочому листі Excel.

Зразок звіту показаний на рис. 1.1.

Робота №1. Для заданих значень X,Y розрахувати за відомими формулами
параметри лінійної моделі і побудувати графік залежності: Y - попит, X -прибуто

Лінійна модель	
Yp = b0 + b1*X	
Коваріація і дисперсії	
Sxy = (XY)cp - (Xcp)*(Ycp) =	128,354
Sxx = (XX)cp - (Xcp)^2 =	330,354
Syy = (YY)cp - (Ycp)^2 =	54,2431
Середні квадратичні відхилення	
Sx = КОРЕНЬ(Sxx) =	18,1756
Sy = КОРЕНЬ(Syy) =	7,36499
Коефіцієнт кореляції	
Rxy = Sxy / (Sx*Sy) =	0,95884
Коефіцієнти регресії	
b1 = Rxy*Sy/Sx =	0,38854
b0 = Ycp - b1*Xcp =	-25,042



№	X	Y	XX	XY	YY	Yp
1	206	54	42436	11124	2916	54,9958
2	218	63	47524	13734	3969	59,6582
3	208	52	43264	10816	2704	55,7728
4	227	63	51529	14301	3969	63,1550
5	226	63	51076	14238	3969	62,7665
6	225	65	50625	14625	4225	62,3779
7	234	67	54756	15678	4489	65,8747
8	232	63	53824	14616	3969	65,0977
9	246	73	60516	17958	5329	70,5372
10	257	74	66049	19018	5476	74,8110
11	256	75	65536	19200	5625	74,4225
12	264	75	69696	19800	5625	77,5308
№	X	Y	XX	XY	YY	Yp
Середні	233,250	65,583	54735,9	15425,7	4355,417	65,5833

Рис.1.1. Приклад виконання роботи

Тема 2. Парна лінійна регресія

Лабораторна робота 2. Побудова та аналіз функції парної лінійної регресії з використанням засобів MS Excel.

Мета: опанувати використання графічних опцій *Добавить тренд*, *Показать уравнение* і *R2*. Використати функції КОРРЕЛ, НАКЛОН, ОТРЕЗОК, ПРЕДСКАЗ, та функцію діапазону ЛИНЕЙН, вивчити статистичні показники функції ЛИНЕЙН.

Завдання:

Освоїти функції Excel для обробки даних.

Необхідно:

Для обробки одновимірних залежностей (лише одна пояснююча змінна) Excel має кілька вбудованих функцій:

- функція КОРРЕЛ повертає коефіцієнт кореляції Rxy,
- функція НАКЛОН – коефіцієнт регресії b1,
- функція ОТРЕЗОК – вільний член лінійної моделі b0,
- функція ПРЕДСКАЗ обчислює розрахункові значення за лінійною моделлю Ур = b0 + b1*x.

Пояснення до виконання

Функцію ПРЕДСКАЗ можна застосовувати також як функцію діапазону, для чого необхідно попередньо виділити діапазон результату, першим аргументом функції задати не одне значення x, а весь діапазон X, введення завершити клавіатурною комбінацією **Ctrl+Shift+OK**.

У графічних опціях Майстра Діаграм є цікава опція *Добавить линию тренда*. На графіку з'явлиться лінія тренда, рівняння лінійної регресії і коефіцієнт детермінації.

На (рис. 2.1) наведено зразок звіту до лабораторної роботи № 2.

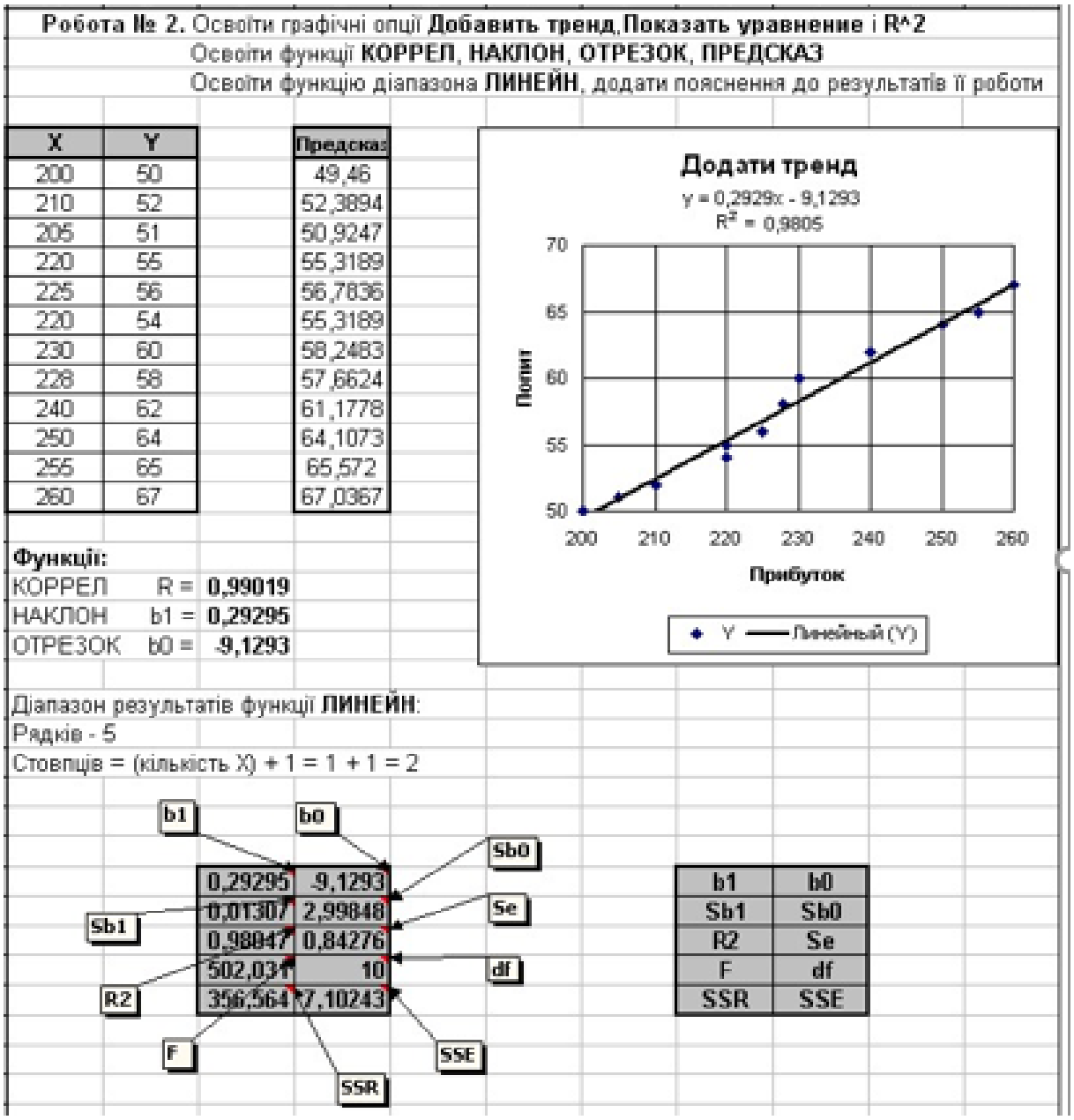


Рис. 2.1. Зразок звіту

За допомогою функції ЛИНЕЙН можна докладно аналізувати як одновимірні, так і багатовимірні залежності, що буде потрібно надалі. Як для будь-якої функції діапазону тут потрібно попередньо виділити діапазон результатів, що буде завжди мати 5 рядків, а число стовпців дорівнюватиме числу параметрів моделі (два параметри b0 й b1). Введення завершуємо клавіатурною комбінацією **Ctrl+Shift+OK**.

У перших двох рядках діапазону результату функції ЛИНЕЙН виводяться коефіцієнти регресії і стандартні похибки цих коефіцієнтів *у зворотному порядку*. В

інших рядках перших двох стовпців приводяться наступні характеристики: коефіцієнт детермінації R2, стандартна похибка Se (незміщена оцінка), дисперсійне відношення Фішера F, залишкове число ступенів свободи df, суми квадратів розрахункових значень SSR і залишків моделі SSE.

Розглянемо докладно усі числові характеристики (статистики), які обчислюються функцією ЛИНЕЙН:

SSR – сума квадратів відхилень розрахункових значень від Yср. Оскільки розрахункові значення Yр вже обчислені функцією ПРЕДСКАЗ, то для перевірки SSR можна одержати як добуток SSR = n * ДИСПР(Yр). У даному прикладі n = 12, у загальному випадку n треба обчислювати: n = СЧЕТ(Yр).

SSE – залишкова сума квадратів, її можна обчислити за формулою:

SSE = СУММКВРАЗН(Y;Yр).

Можна обчислити суми квадратів SSY, SSR, SSE і порівняти останні дві суми з розрахунками функції ЛИНЕЙН. Перевірте, що SSY = SSR + SSE.

R2 – коефіцієнт детермінації, що показує, яка частка повної мінливості Y визначається регресійною моделлю: R2 = SSR / SSY або R2 = 1 – SSE / SSY.

df – залишкове число ступенів свободи: dfE = n – 1 – m, де m – число пояснюючих змінних (у даному прикладі m = 1).

Se – незміщена оцінка стандартного відхилення: Se = КОРЕНЬ(MSE).

Тут MSE (Mean Squares Error) – середній квадрат похибки – незміщена оцінка дисперсії залишків моделі: MSE = SSE / dfE.

Корисно заповнити таблицю дисперсійного аналізу (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 Таблиця дисперсійного аналізу

Джерело мінливості		**Суми квадратів**		**Числа ступенів свободи**		**Середні квадрати**		**Дисперсійне відношення**	
Регресія	**R**	SSR=	356,564	dfR=	1	MSR=	356,564	F=	502,031
Залишки	**E**	SSE=	7,10243	dfE=	10	MSE=	0,71024		
Загальна	**Y**	SSY=	363,667	dfY=	11				

Суми квадратів SSR, SSE вже обчислені. Для чисел ступенів свободи має місце співвідношення dfY = dfR + dfE, аналогічне розкладу SSY = SSR + SSE.

Загальне ЧСС дорівнює dfY = n – 1 (Чому?), залишкове ЧСС обчислено за формулою dfE = n – 1 – m (Чому так?), останнє ЧСС одержуємо як різницю dfR = dfY – dfE = m.

Середні квадрати – незміщені оцінки дисперсій – дорівнюють відношенням сум квадратів до ЧСС (MS = SS / df).

Дисперсійне відношення Фішера F показує, у скільки разів мінливість розрахункових значень перевищує залишкову мінливість: F = MSR / MSE (порівняєте отримане значення з розрахунком функції ЛИНЕЙН).

У першому рядку діапазону результатів функції ЛИНЕЙН наведені коефіцієнти регресії b1 і b0 *у зворотному порядку* (вони також отримані функціями НАКЛОН і ОТРЕЗОК). У другому рядку наведені стандартні похибки коефіцієнтів регресії Sb1 і Sb0 (також *у зворотному порядку*). Формули для обчислення цих характеристик будуть наведені далі. Це дає можливість оцінити значимість окремих членів моделі за критерієм Ст'юдента tb = b / Sb:

tb0 = b0/Sb0 = –9,129/2,998 = –3,04 ; tb1 = b1/Sb1 = 0,293/0,0131 = 22,41.

Статистики Ст'юдента tb показують у скільки разів коефіцієнти регресії перевищують свої стандартні відхилення.

Тема 3. Множинна лінійна регресія

Лабораторна робота 3. Регресійний аналіз у матричній формі.

Мета: освоїти техніку роботи з матричними функціями Excel.

Завдання:

Використовуючи техніку роботи з матричними функціями Excel вирішити задачу множинної лінійної регресії.

Необхідно:

1) оцінити параметри лінійної моделі за допомогою матричних перетворень;

2) оцінити якість моделі за допомогою коефіцієнта детермінації;
3) оцінити статистичну значущість рівняння в цілому;
4) оцінити статистичну значущість параметрів лінійної регресії;
5) оформити звіт про виконання лабораторної роботи.

Дані спостережень (X,Y) для виконання наведені в табл. 3.1, де N - Ваш номер за списком у журналі.

Таблиця 3.1.

№	X1	X2	X3	Y
1	200 +N	22+N	2+N	50 +2*N
2	210 +N	21+N	3+N	52 +2*N
3	205 +N	21,5+N	2,5+N	51+2*N
4	220 +N	19+N	4+N	55 +2*N
5	225 +N	18+N	5+N	56 +2*N
6	220 +N	18,5+N	4,5+N	54 +2*N
7	230 +N	16+N	6+N	60 +2*N
8	228 +N	17+N	9+N	58+2*N
9	240 +N	15+N	10+N	62 +2*N
10	250 +N	12+N	11+N	64 +2*N
11	255 +N	11+N	11+N	65 +2*N
12	260 +N	11+N	12+N	67+2*N

Пояснення до виконання

Правила роботи з функціями Excel, що повертають діапазони результатів (далі просто *функції діапазонів*). Зокрема, такими функціями є всі матричні функції, наприклад, ТРАНСП, МУМНОЖ, МОБР.

Насамперед, слід розрахувати розмір діапазону результату і виділити на робочому листі Excel блок необхідного розміру. Далі (не знімаючи виділення) треба набрати знак рівності (=), викликати функцію діапазону і заповнити її поля введення. Уведення завершити натисканням одночасно трьох клавіш **Ctrl+Shift+Enter**, або

Ctrl+Shift+ОК. Згодом можна видалити весь блок результатів, але спроби редагувати частину результатів будуть блоковані з відповідним попередженням. Розблокувати аркуш можна декількома натисканнями клавіші **Esc**.

На (рис. 3.1) наведений зразок виконання роботи, де за вихідні дані взяті дані (для порівняння результатів). Для розрахунків у матричній формі в таблицю доданий одиничний стовпець X0.

Робота №3. Для відомих X, Y обчислити в матричній формі параметри й розрахункові значення лінійної моделі, використовуючи функції діапазонів ТРАНСП, МУМНОЖ, МО

Модель у матричній формі
Y=b0*X0+b1*X1+...+bm*Xm+E
Матриці-стовпці:
Y, Yp, E, X0=1, X1, ..., Xm
Матриця X =[X0, X1, ..., Xm]
Транспоновані матриці:
XT, BT = (b0, b1, ..., bm)
Система нормальних рівнянь
(XT)Y = (XT)XB ; (XT)E = 0
Обернена матриця:
C = МОБР(XTX)
Коефіцієнти регресії
B = C(XTX)B = C(XT)Y
Розрахункові значення: Yp=XB
Залишки і суми квадратів
E = Y-Yp; SSE = СУММКВ(E)
SSY = СУММКВ(Y-Yср)
SSR = СУММКВ(Yp-Yср)
Коефіцієнт детермінації
R2 = SSR/SSY = 1 - SSE/SSY
Коеф. множинної кореляції:
R = КОРЕНЬ(R2)

Правила роботи з функціями діапазонів:
1. Виділити діапазон результату.
2. Не знімаючи виділення, викликати функцію
3. Заповнити поля введення.
4. Уведення завершити комбінацією Ctrl+Shift+Enter

№	X0	X1	Y	Yp	E
1	1	200	50	57,46	-7,46
2	1	210	52	60,389	-8,39
3	1	205	51	58,925	-7,92
4	1	220	55	63,319	-8,32
5	1	225	56	64,784	-8,78
6	1	220	54	63,319	-9,32
7	1	230	60	66,248	-6,25
8	1	228	58	65,662	-7,66
9	1	240	62	69,178	-7,18
10	1	250	64	72,107	-8,11
11	1	255	65	73,572	-8,57
12	1	260	67	75,037	-8,04
СРЗНАЧ	1	228,583	57,833	65,833	-8,00
ДИСПР	0	346,243	30,306	29,714	0,592
SS	0	4154,9	363,67	356,56	7,1024

XT (Функція ТРАНСП)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
200	210	205	220	225	220	230	228	240	250	255	260

	XTX		XTY	C		B
Обчислення матриць XTX, XTY	12	2743	694	12,6589	-0,055	-9,129
з використанням матриці XT	2743	631159	159854	-0,055	0,0002	0,2929
				Обернена матриця		
Обчислення матриць XTX, XTY	12	2743	694	(Функцією МОБР)		
без використанням матриці XT	2743	631159	159854	C(XTX) = I		

Рис. 3.1 Зразок звіту до лабораторної роботи № 3

Рекомендуються усі матриці виділяти рамкою і кольорами.

Розмір матриці X = [X0, X1] – 12×2 (12 рядків, 2 стовпця). Розмір транспонованої матриці XT буде 2×12 (2 рядка, 12 стовпців). Виділяємо на вільному місці робочого

аркуша блок необхідного розміру, набираємо знак рівності (=) і викликаємо функцію =ТРАНСП(*Діапазон матриці* X). Введення завершуємо одночасним натисканням клавіш **Ctrl+Shift+OK** або **Ctrl+Shift+Enter**.

Якщо вихідним матрицям дати імена X, Y, то формула для транспонування прийме вигляд: =ТРАНСП(X).

Розмір добутку матриць (XT)X – 2×2 (число рядків дорівнює числу рядків матриці ліворуч, число стовпців дорівнює числу стовпців матриці праворуч).

Виділяємо на вільному місці блок цього розміру і за допомогою функції МУМНОЖ обчислюємо добуток матриць XTX.

Розмір добутку матриць (XT)Y – 2×1 (матриця праворуч – один стовпець Y). Обчислюємо матричний добуток XTY. Обертаємо квадратну матрицю XTX за допомогою функції МОБР. Розмір зворотної матриці C – такий же (2×2). Перевіряємо, що добуток взаємно зворотних матриць C і XTX дорівнює одиничній матриці I.

Нарешті, обчислюємо стовпець параметрів B як добуток матриць C і XTY (розмір 2×1). У цій лінійній моделі врахована тільки одна пояснююча змінна X1, тому можна порівняти результати розрахунків у матричній формі з результатами розрахунків за готовими формулами (Лабораторна робота № 1).

Розрахункові значення можна обчислити блоком у вигляді матричного добутку Yp = XB, для чого в таблиці виділяємо стовпець Yp (тільки числа, без рядка заголовка і підсумкових рядків), далі обчислюємо XB функцією МУМНОЖ.

Стовпець залишків моделі E також можна обчислити блоком, для чого в таблиці виділяємо стовпець E, набираємо знак рівності, указуємо мишкою діапазон значень Y, набираємо знак мінус, указуємо діапазон Yp і натискаємо клавіатурну комбінацію **Ctrl+Shift+Enter**.

Якщо числовим стовпцям дати імена Y, Yp, то формула для обчислення значень E прийме зрозумілий вигляд: =Y–Yp.

У підсумкових рядках таблиці обчислені середні, дисперсії (звичайні оцінки) і суми квадратів відхилень. Звичайні оцінки дисперсії розраховуються функцією

ДИСПР; суми квадратів пропорційні цим значенням SS = ДИСПР * n, де число спостережень (n) варто визначати функцією СЧЕТ (для гарантії правильності обчислень при заміні даних).

Помітимо, що при використанні блокових операцій для обчислення Yp, E і матриці XT у подальшому неможливо ні видалення зайвих, ні додавання нових рядків даних. Бажано завжди так організовувати обчислення, щоб оформлений лист Excel був шаблоном і його можна було застосовувати для наступних розрахунків з іншими даними.

Збережемо виконану роботу і зробимо копію робочого листа, у якій відмовимося від блокових операцій і обчислимо матричні добутки XTX, XTY без попереднього формування матриці XT. Для цього застосовуємо вкладені функції =МУМНОЖ(ТРАНСП(X);X) і =МУМНОЖ(ТРАНСП(X);Y). Якщо не прийняті імена для матриць X і Y, у формулах замість них треба вказувати адреси відповідних діапазонів.

Складні формули можна набирати за допомогою Майстра Функцій. При наборі у клітинці знака рівності (=) на панелі формул активізується список вбудованих функцій. Вибираємо в цьому списку функцію МУМНОЖ і на екрані з'являється панель цієї функції. У поле *Массив1* треба викликати другу матричну функцію ТРАНСП.

Якщо ми бажаємо скористатися допомогою Майстра Функцій, треба нажати на кнопку f_x, вибрати у списку нову функцію (при цьому активізується новий Майстер Функцій), заповнити її поля введення (**ОК** не натискати!) і на панелі формул, де набирається текст формули, після 1-го операнда поставити крапку з комою (;). Після цього можна заповнювати поле *Массив2* на панелі функції МУМНОЖ. Введення треба завершити клавіатурною комбінацією **Ctrl+Shift+Enter**.

Якщо панель Майстра перекриває потрібний діапазон, треба нажати кнопку праворуч від поля введення (із червоною стрілкою по діагоналі), панель відразу буде згорнута, залишивши тільки поле введення. Повторне натискання на цю ж кнопку відновлює панель Майстра Функцій.

Використання вкладених функцій дозволяє не формувати транспоновану матрицю XT, яка досить незручно розташовується на робочому листі. Відмовимося також від блокових операцій для обчислення Yp і E. Позначимо через U – рядок матриці X (рядок аргументів x_0, x_1, …, x_m). Тоді розрахункові значення для кожного рядка спостережень можна обчислювати як добутки Yp = UB.

Так, для першого спостереження у клітинці J11 потрібно набрати:

=МУМНОЖ (G11:H11; $L$33:$L$34), де замість імен операндів зазначені адреси відповідних матриць. Адреси діапазону матриці B повинні бути абсолютними. Цю формулу треба скопіювати в усі клітинки діапазону Yp. Стовпець E формуємо звичайним чином.

Якщо діапазону $L$33:$L$34 дати ім'я B, а діапазону $G11:$H11 – ім'я U, то формула у клітинці J11 прийме простий вигляд: =МУМНОЖ(U;B). За замовчуванням при створенні нового імені використовується абсолютна адреса, але при створенні імені U слід фіксувати ($) лише стовпці адресу діапазону рядка $G11:$H11.

Щоб привласнити рядку матриці X ім'я U, треба виділити 1-й рядок матриці і через меню *Вставка, Имя, Присвоить* викликати панель, де в поле *Имя* набрати ім'я U, а в поле *Формула* поставити курсор наприкінці формули і два рази натиснути клавішу **F4** для того, щоб зняти зайві фіксатори $.

Тепер (після відмови використати матрицю XT і блокових операцій для обчислення Yp, E) з'являється можливість видаляти зайві рядки таблиці й додавати нові рядки в таблицю даних.

Нові дані шки моделі E повинні перераховуватися автоматично. Можна повернутися назад до вихідних даних. Тепер потрібно *додавати* рядок даних. Новий рядок можна додати у будь-яке місце масиву, але не перед першим і не після останнього рядка. Якщо буде потрібно перенести дані першого або останнього рядків на нове місце, робити це можна тільки копіюванням, але не вирізанням.

Обчислюємо коефіцієнт детермінації двома способами:

R2 = SSR / SSY і R2 = 1 – SSE / SSY.

Ці формули еквівалентні лише при оцінці параметрів моделі методом найменших квадратів (МНК), тому що при цьому дотримуються умови:

$$SSY = SSR + SSE,\ Re,yp = 0.$$

Корінь квадратний з коефіцієнта детермінації R=КОРЕНЬ(R2) називається коефіцієнтом множинної кореляції; він дорівнює коефіцієнту парної кореляції між експериментальними Y і розрахунковими Yp значеннями. Для лінійної моделі з однією пояснюючою змінною X коефіцієнт множинної кореляції R дорівнює абсолютній величині коефіцієнта парної кореляції | Rxy |.

Тема 4. Мультиколінеарність в економетричних моделях

Лабораторна робота 4. Дослідження економетричної моделі на наявність мультиколінеарності.

Мета: На прикладі трифакторної залежності попиту на товар від особистого доходу, ціни на товар і ціни на взаємозамінні товари вивчити ефект мультиколінеарності та засвоїти стандартні дії для подолання небажаних наслідків цього ефекту.

Завдання 4.1.

Дослідити явище мультиколінеарності використовуючи матричний інструментарій.

Необхідно:

За вхідними даними власного варіанту лабораторної роботи №3 Вам необхідно:

1. дослідити масив вхідних даних на мультиколінеарність:
   а) через матрицю парних коефіцієнтів кореляції;
   б) через детермінант матриці R парних коефіцієнтів кореляції між факторами;
   в) за допомогою алгоритму Фарара Глобера.
2. за наявності мультколінеарності виключити один із факторів (пояснити який і чому), побудувати нову модель з двома незалежними змінними і оцінити її якість.

3. зробити висновок:

а) у висновку вказати, чи вдалось Вам побудувати якісну регресійну модель чи ні.

б) якщо не вдалось побудувати якісну модель, то які мають бути наступні кроки.

Завдання 4.2.

Дослідити масив вхідних даних на мультиколінеарність.

Необхідно:

Відомі дані про продуктивність праці Y (т/год), рівень механізації робіт X1 (%), середній вік робітників X2 (років) і енергоозброєність X3 (КВт / 100 працюючих) за 14-ма промисловими підприємствами. За даними власного варіанту (значення N таке як в лабораторній роботі № 3) (табл. 4.1) необхідно:

Таблиця 4.1.

№	**Продуктивність праці, т/год**	**Рівень механізації робіт, %**	**Середній вік робітників, років**	**Електроозброєність, КВт/100 працюючих**
	У+2*N	***X1+N***	***X2+N***	***X3+N***
1	31	39	44	450
2	33	43	42	425
3	34	44	49	500
4	36	50	46	465
5	37	59	37	380
6	40	57	41	400
7	41	63	45	455
8	43	58	38	390
9	44	64	42	415
10	46	70	47	480
11	48	72	43	435
12	51	79	44	440

13	23	35	36	355
14	27	33	34	340
15	38	51	47	470
16	39	60	39	390
17	42	59	43	420
18	44	64	46	460
19	45	59	40	400
20	47	65	45	420
21	48	66	36	310

1. побудувати модель множинної лінійної регресійної залежності від факторів X_1, X_2 , X_3

2. дослідити масив вхідних даних на мультиколінеарність:

a. через матрицю парних коефіцієнтів кореляції;

b. через детермінант матриці R парних коефіцієнтів кореляції між факторами;

c. за допомогою алгоритму Фарара-Глобера;

3. за наявності мультиколінеарності виключити один з факторів (пояснити який і чому), побудувати нову модель з двома незалежними змінними і оцінити її якість.

4. зробити висновок. У висновку написати, чи вдалося нам побудувати якісну регресійну модель, чи ні. Якщо ні, то які мають бути подальші кроки.

Хід виконання завдання

Відомі дані про продуктивність праці *Y* (т/год), рівень механізації робіт X_1 (%), середній вік робітників X_2 (років) і енергоозброєність X_3 (КВт / 100 працюючих) за 14-ма промисловими підприємствами. Необхідно побудувати модель множинної лінійної регресійної залежності продуктивності праці від інших відомих факторів та оцінити її. Вхідні дані подано у таблиці 4.1.

Необхідно засобами EXCEL дослідити масив вхідних даних на мультиколінеарність:

1) через матрицю парних коефіцієнтів кореляції;

2) через детермінант матриці R парних коефіцієнтів кореляції між факторами;

3) за допомогою алгоритму Фарара-Глобера.

Рішення

Таблиця 4.1.

Вхідні дані до побудови моделі множинної лінійної регресії

i	X1	X2	X3	Y
1	43	48	425	33
2	49	45	485	35
3	58	36	580	36
4	56	10	550	39
5	62	44	610	40
6	57	37	560	42
7	63	41	620	43
8	69	46	700	45
9	71	42	700	47
10	78	43	785	50
11	34	35	350	22
12	32	33	325	26
13	38	43	385	30
14	42	41	415	32

1. Дослідити наявність інтеркореляції між пояснюючими факторами через матрицю парних коефіцієнтів кореляції.

Зауваження: отримати матрицю парних коефіцієнтів кореляції можна за допомогою надбудови Excel Анализ данных→Корреляция. Налаштування параметрів відповідного вікна подано на (рис. 4.1).

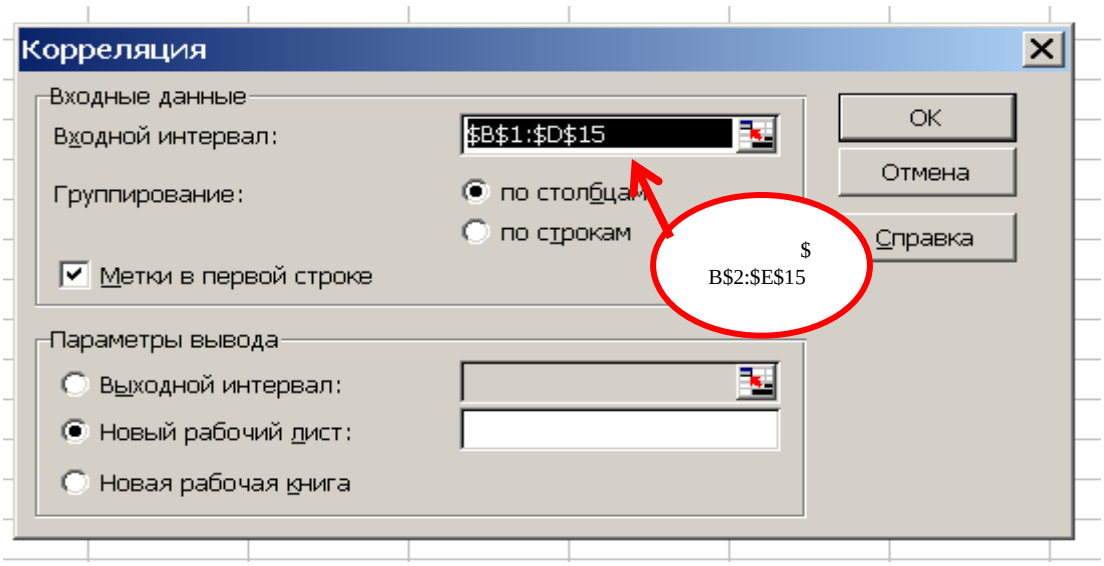


Рис. 1. Налаштування вікна КОРРЕЛЯЦИЯ

Зразок оформлення завдання подано на (рис. 4.2).

	Y	*X1*	*X2*	*X3*
Y	1			
X1	0,968685	1		
X2	0,425757	0,361976	1	
X3	0,961302	0,998604	0,357367	1

1) Між змінними x3 та x1 існує досить щільний зв'язок , так як r_{x3x1}=0,99`
2) Бажано не включати у регресійне рівняння змінну x3, тому що зв'язок між нею і змінною x2 тісніший (r_{x3x2}=0,42), ніж між змінними x1 і x2 (r_{x1x2}=0,36), при рівній силі зв'язку зазначених змінних з результатом y

Рис. 4.2 Результат перевірки змінних на інтерколінеарність

2. Зробити висновок про наявність мультиколінеарності між досліджуваними змінними через детермінант матриці R парних коефіцієнтів кореляції між факторами.

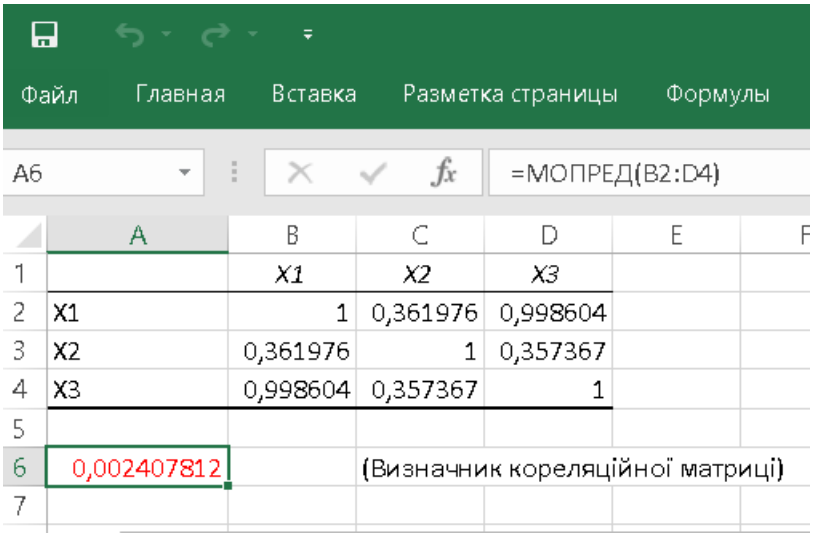
	X1	*X2*	*X3*
X1	1	0,361976	0,998604
X2	0,361976	1	0,357367
X3	0,998604	0,357367	1

0,002407812 (Визначник кореляційної матриці)

чим ближче до нуля, тим певніше можна стверджувати, що між пояснювальними змінними існує мультиколінеарність.
Оскільки в нашому прикладі визначник дорівнює 0,002407812, то можна стверджувати, що між пояснювальними змінними існує мультиколінеарність.

Рис. 4.3 Висновок

Обчислити визначник кореляційної матриці.



	A	B	C	D	E	F
1		*X1*	*X2*	*X3*		
2	X1	1	0,361976	0,998604		
3	X2	0,361976	1	0,357367		
4	X3	0,998604	0,357367	1		
5						
6	0,002407812		(Визначник кореляційної матриці)			
7						

Рис. 4.4 Визначник кореляційної матриці

Якщо $|r_{xx}|=0$, то існує повна мультиколінеарність, а коли $|r_{xx}|=1$, то мультилінеарність відсутня, чим ближче $|r_{xx}|$ до нуля, тим певніше можна стверджувати,що між пояснювальними змінними існує мультиколінеарність. Незважаючи на те, що на числове значення $|r_{xx}|$ впливає дисперсія пояснювальних змінних, цей показник можна вважати точковою мірою рівня мультиколінеарності

В нашому прикладі $|r_{xx}|=0{,}002407812$ мультиколінеарність існує.

3. Дослідити вхідний масив даних на мультиколінеарність за допомогою алгоритму Фарара-Глобера.

Алгоритм Фаррара-Глобера застосовує три види статистичних критеріїв для виявлення мультиколінеарності:

- усього масиву незалежних змінних (критерій χ^2);
- кожної незалежної змінної з усіма іншими (*F*-критерій);
- кожної нари незалежних змінних (*t*-критерій).

Порівнявши ці критерії з їх критичними значеннями, можна зробити конкретні висновки щодо наявності чи відсутності мультиколінеарності незалежних змінних.

Етапи алгоритму Фарара-Глобера.

1-ий крок: Нормалізуємо значення факторів:

$$x_{ij}^{*} = \frac{\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)}{\sqrt{n\sigma_{x_j}^2}}$$

де n – кількість спостережень (i = 1, 2, ..., n);

m – кількість незалежних змінних (j=1, m);

$\bar{x}_j$ – середня арифметична j-ої незалежної змінної;

$\sigma_{x_j}^2$ – дисперсія j-ої незалежної змінної.

Де n=14 - кількість спостережень; m=3 – кількість незалежних змінних; (j=1,m); $\bar{x}_j$ - середня арифметична незалежної змінної x_i ; $\sigma_{x_j}^2$ – дисперсія j-ої незалежної змінної.

Обчислюємо середні арифметичні значення і будуємо матрицю нормалізованих змінних X*:

9 =СРЗНАЧ(C3:C16)

	A	B	C	D	E	F	G	H
	i	Y	X1	X2	X3	X1*	X2*	X3*
	1	20	32	33	300	-0,36609	-0,36568	-0,37414
	2	24	30	31	290	-0,54852	-0,48757	-0,39208
	3	28	36	41	350	-0,29173	0,121892	-0,28445
	4	30	40	39	400	-0,21745	0	-0,19476
	5	31	41	46	400	-0,19888	0,426623	-0,19476
	6	33	47	43	480	-0,08746	0,243785	-0,05125
	7	34	56	34	500	0,079664	-0,30473	-0,01537
	8	37	54	38	520	0,042525	-0,06095	0,020503
	9	38	60	42	590	0,153942	0,182838	0,146071
	10	40	55	35	540	0,061094	-0,24378	0,05638
	11	41	61	39	600	0,172512	0	0,16401
	12	43	67	44	700	0,28393	0,304731	0,343393
	13	45	69	40	700	0,321069	0,060946	0,343393
	14	48	76	41	750	0,451057	0,121892	0,433084
	Середнє значення		51,71429	39	508,5714			
	$\sigma_{x_j}^2$		207,1429	19,23077	22197,8			

Рис. 4.5 Результат 1-го кроку

2-ий крок: Знаходимо кореляційну матрицю за формулою:

$$R = \left(X^*\right)^T X^* = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де $\left(X^*\right)^T$ – транспонована матриця X^* (елементи матриці R характеризують щільність зв'язку однієї незалежної змінної з іншою);

$r_{ij} = r_{x_i x_j}$ – парні коефіцієнти кореляції.

Порівнюємо цю матрицю з матрицею, отриманою на попередньому етапі.

Зауваження: для транспонування матриці засобами MSExcel використовують функцію ТРАНСП(масив). Слід пам'ятати наступне:

1) перед застосуванням функції ТРАНСП слід виділити всі комірки, де буде розташований результат;

2) для виконання функції ТРАНСП натискають CTRL+ALT+ENTER.

Для множення матриць використовують функцію МУМНОЖ. Перед її використанням слід також виділити клітини, де буде розташований результат.

Якщо діагональні елементи матриці R не дорівнюють одиниці, то на діагоналі цієї матриці ми проставляємо одиниці, а до решти елементів додаємо різницю між одиницею й значенням діагонального елемента.

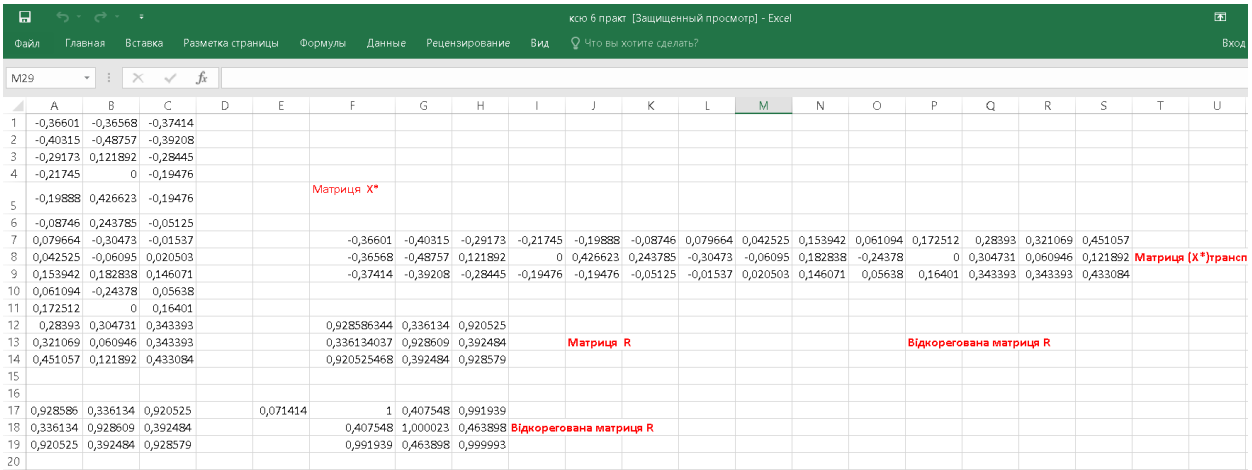


Рис. 4.6 Результат 2-го кроку

$|R|$=0,002407812 .

Елементи матриці R аналогічні отриманим у п.1.

3-ий крок: Визначаємо значення χ^2

$$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5)\right] \cdot \ln|R|$$

де $|R|$ – визначник кореляційної матриці *R*;

Порівнюємо χ^2 з табличним значенням при $\frac{1}{2}m(m-1)$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $\chi^2 > \chi^2_{табл}$, то в масиві незалежних змінних існує мультиколінеарність.

Зауваження: для обчислення $\chi^2_{табл}$ використовують функцію ХИ2ОБР(рівень значущості; ступені свободи).

0,009828	Визначник (јопределитель) матриці R
51,61792	$\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right] \cdot \ln\|R\|$
7,814728	χ^2 *табл* (0,05; 3).

Рис. 4.7 Результат 3-го кроку

4-ий крок: Визначаємо обернену матрицю (матрицю похибок)

$$\mathrm{P} = \mathrm{R}^{-1} = \left(\left(X^*\right)^T X^*\right)^{-1} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

Зауваження: для обчислення оберненої матриці використовують функцію МОБР(масив).

Матриця Р	79,80737	5,350044	-81,6459
	5,350044	1,632863	-6,0644
	-81,6459	-6,0644	84,80103

Рис. 4.8 Результат 4-го кроку

5-ий крок: Визначаємо *F*-критерії Фішера

$$F_k = \frac{(p_{kk} - 1)(n - m)}{(m - 1)}$$

де p_{kk} – діагональні елементи матриці Р;

Розраховані значення критеріїв порівнюються з табличними при (n-m) і (m-1) ступенях свободи й рівні значущості α. Якщо $F_k > F_{табл}$, то відповідна k-та незалежна змінна мультиколінеарна з іншими);

$$F_1 = \frac{(p_{11} - 1)(n - m)}{(m - 1)} = \frac{(79{,}80737 - 1)(14 - 3)}{(3 - 1)} = 14{,}32861$$

$$F_2 = \frac{(p_{22} - 1)(n - m)}{(m - 1)} = \frac{(1{,}632863 - 1)(14 - 3)}{(3 - 1)} = 0{,}115066$$

$$F_3 = \frac{(p_{33} - 1)(n - m)}{(m - 1)} = \frac{(84{,}80103 - 1)(14 - 3)}{(3 - 1)} = 15{,}23655$$

$F_{табл}$=FРАСПОБР (α;m-1;n-m-1)= 4,102821

Рис. 4.9 Результат 5-го кроку

Оскільки експерементальне значення F_2 менше від табличного,робимо висновок,що ця незалежна змінна не мультиколінеарна з іншими, F_1 і F_3 – мультиколінеарні.

6-ий крок: Розраховуємо часткові коефіцієнти кореляції, які характеризують щільність зв’язку між двома змінними за умови, що інші змінні не впливають на цей зв’язок (існування парної мультиколінеарності):

$$r_{kj} = \frac{-p_{kj}}{\sqrt{p_{kk} p_{jj}}}$$

де p_{kj} – елемент матриці P, що розміщений у k-ому рядку та j-му стовпці;

p_{kk} і p_{jj} – діагональні елементи матриці C.

$r_{23} = \frac{-p_{23}}{\sqrt{p_{22} p_{33}}}$	0,515362
$r_{12} = \frac{-p_{12}}{\sqrt{p_{11} p_{22}}}$	-0,46866
$r_{13} = \frac{-p_{13}}{\sqrt{p_{11} p_{33}}}$	0,992458

Рис. 4.10 Часткові коефіцієнти кореляції

7-ий крок: Розрахуємо t-критерії:

$$t_{kj} = |r_{kj}| \cdot \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}}$$

Розраховані значення t-критеріїв t_{kj} порівняти з табличними при (n-m) ступенях свободи та рівні значущості α. Якщо $t_{kj} > t_{табл}$, то між незалежними змінними x_k і x_j існує мультиколінеарність.

$t_{23} = \lvert r_{23} \rvert \cdot \frac{\sqrt{14-3}}{\sqrt{1-r_{23}^2}}$	1,994536
$t_{12} = \lvert r_{12} \rvert \cdot \frac{\sqrt{14-3}}{\sqrt{1-r_{12}^2}}$	1,759589
$t_{13} = \lvert r_{13} \rvert \cdot \frac{\sqrt{14-3}}{\sqrt{1-r_{13}^2}}$	26,85237
$t_{табл}$ = СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(0,05;11)	2,200985

Рис. 4.11 Розрахунок *t*-критерію

Оскільки $t_{12}<t_{табл}$,,$t_{13}>t_{табл}$, $t_{23}<t_{табл}$, то між першою та третьою незалежними змінними існує мультиколінеарність.

Тема 5. Гетероскедастичність в економетричних моделях

Лабораторна робота 5. Дослідження економетричної моделі на наявність гетероскедастичності.

Мета: опанувати методи перевірки економетричної моделі на наявність гетероскедастичності .

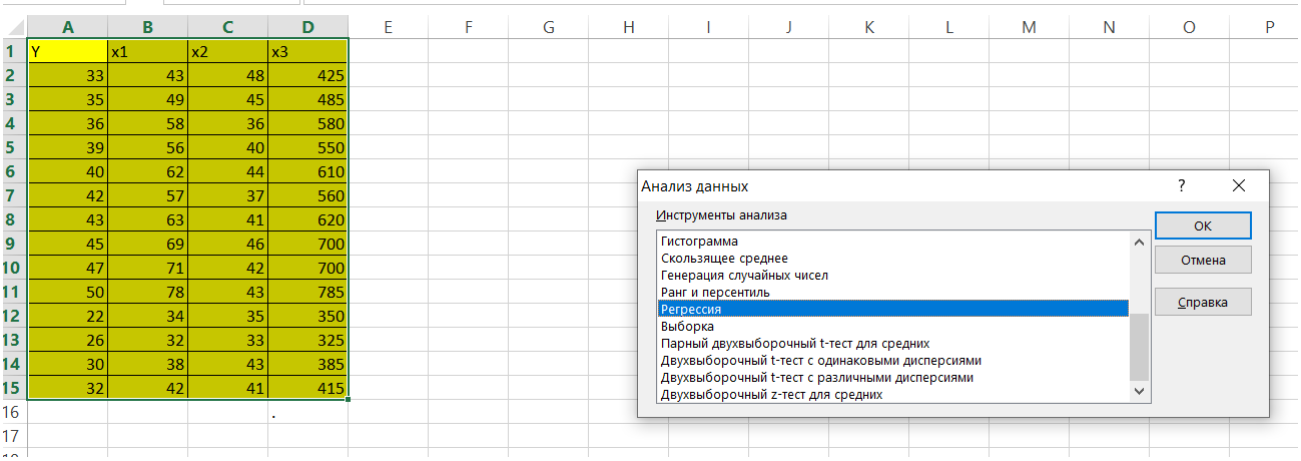
Завдання 5.1.

Розрахунок гетероскедастичністі методом Спірмена.

Необхідно:

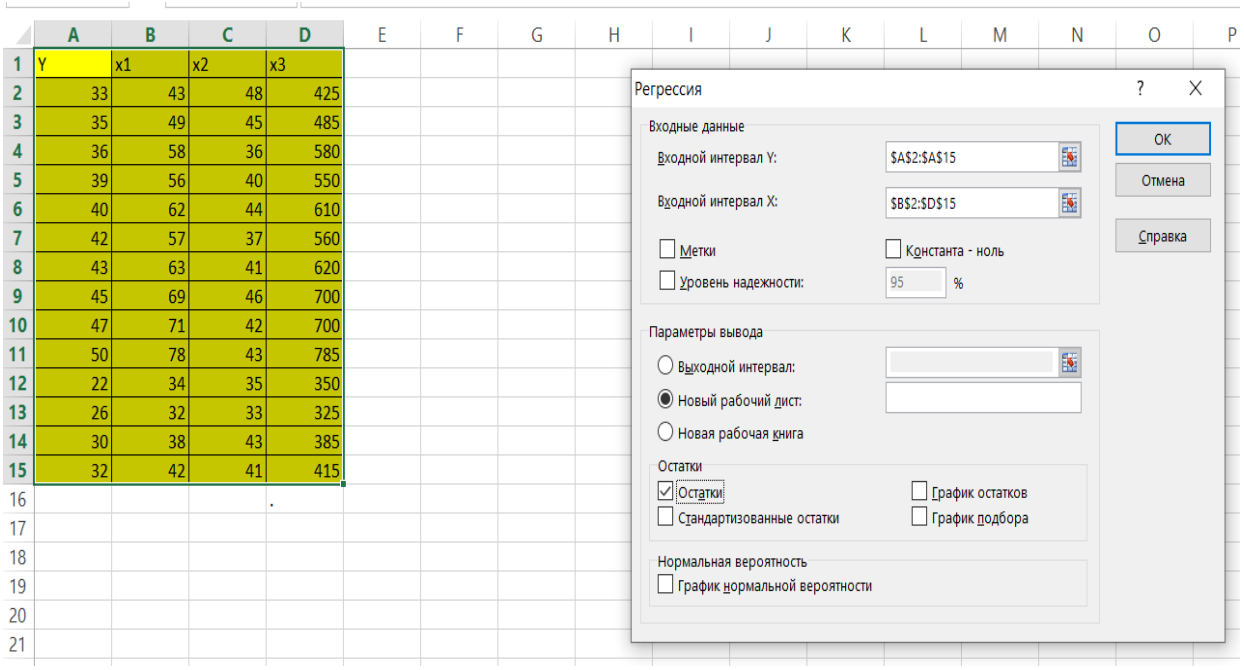
Перевірити модель, побудовану у попередній лабораторній роботі, на гетероскедастичність методом Спірмена (для змінної X_1).

Хід виконання завдання



	A	B	C	D
1	Y	x1	x2	x3
2	33	43	48	425
3	35	49	45	485
4	36	58	36	580
5	39	56	40	550
6	40	62	44	610
7	42	57	37	560
8	43	63	41	620
9	45	69	46	700
10	47	71	42	700
11	50	78	43	785
12	22	34	35	350
13	26	32	33	325
14	30	38	43	385
15	32	42	41	415

Рис. 5.1 Використання надстройки “Аналіз даних”



	A	B	C	D
1	Y	x1	x2	x3
2	33	43	48	425
3	35	49	45	485
4	36	58	36	580
5	39	56	40	550
6	40	62	44	610
7	42	57	37	560
8	43	63	41	620
9	45	69	46	700
10	47	71	42	700
11	50	78	43	785
12	22	34	35	350
13	26	32	33	325
14	30	38	43	385
15	32	42	41	415

Рис. 5.2 Використання надстройки “Аналіз даних”

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	*Регрессионная статистика*								
4	Множественны	0,977992379							
5	R-квадрат	0,956469094							
6	Нормированны	0,943409822							
7	Стандартная ош	1,920983374							
8	Наблюдения	14							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
12	Регрессия	3	810,8125145	270,2708382	73,24061394	4,15E-07			
13	Остаток	10	36,90177125	3,690177125					
14	Итого	13	847,7142857						
15									
16		*Коэффициенты*	*андартная ошиб*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
17	Y-пересечение	3,620174365	5,07001017	0,714036904	0,491534276	-7,676512274	14,916861	-7,676512274	14,916861
18	Переменная X 1	1,67552082	0,70456386	2,378096458	0,038738109	0,10565471	3,24538693	0,10565471	3,24538693
19	Переменная X 2	0,141363492	0,130786819	1,080869566	0,305132203	-0,1500477	0,432774685	-0,1500477	0,432774685
20	Переменная X 3	-0,116397429	0,071225477	-1,634210593	0,133261705	-0,275097681	0,042302824	-0,275097681	0,042302824
21									

Рис. 5.3 Використання надстройки “Аналіз даних”

1. Порахувати залишки (відхилення) моделі за формулою:

$$u_i = y_i - Y_i$$

2. Обчислити $|u_i|$ (функція ABS) (див. рис. 5.4).

	A	B	C	D	E	F	G
1	y	x1	x2	x3	Yi	Ui	luiL
2	33	43	48	425	32,98411	0,01589	0,01589
3	35	49	45	485	35,6293	-0,6293	0,629299
4	36	58	36	580	38,37896	-2,37896	2,378959
5	39	56	40	550	39,08529	-0,08529	0,085294
6	40	62	44	610	42,72003	-2,72003	2,720027
7	42	57	37	560	39,17275	2,82725	2,82725
8	43	63	41	620	42,80748	0,192517	0,192517
9	45	69	46	700	44,25563	0,744369	0,744369
10	47	71	42	700	47,04122	-0,04122	0,041219
11	50	78	43	785	49,01745	0,982553	0,982553
12	22	34	35	350	24,7965	-2,7965	2,796504
13	26	32	33	325	24,07267	1,927329	1,927329
14	30	38	43	385	28,55559	1,444414	1,444414
15	32	42	41	415	31,48302	0,516981	0,516981
16							

Рис. 5.4 Використання функції ABS

3. Розрахувати ранги для x_1 і для $|u_i|$ (рис. 5.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	y	x1	x2	x3	Yi	Ui	luiL		Ранг x1	Ранг luiL
2	33	43	48	425	32,98411	0,01589	0,01589		10	14
3	35	49	45	485	35,6293	-0,6293	0,629299		9	9
4	36	58	36	580	38,37896	-2,37896	2,378959		6	4
5	39	56	40	550	39,08529	-0,08529	0,085294		8	12
6	40	62	44	610	42,72003	-2,72003	2,720027		5	3
7	42	57	37	560	39,17275	2,82725	2,82725		7	1
8	43	63	41	620	42,80748	0,192517	0,192517		4	11
9	45	69	46	700	44,25563	0,744369	0,744369		3	8
10	47	71	42	700	47,04122	-0,04122	0,041219		2	13
11	50	78	43	785	49,01745	0,982553	0,982553		1	7
12	22	34	35	350	24,7965	-2,7965	2,796504		13	2
13	26	32	33	325	24,07267	1,927329	1,927329		14	5
14	30	38	43	385	28,55559	1,444414	1,444414		12	6
15	32	42	41	415	31,48302	0,516981	0,516981		11	10
16										

Рис. 5.5 Розрахунок рангів

4. Перевірити суму рангів. Якщо маємо 14 вимірювань, то сума рангів має дорівнювати 105 – сумі чисел від 1 до 14 (рис. 5.6).

I	J
Ранг x1	Ранг luiL
10	14
9	9
6	4
8	12
5	3
7	1
4	11
3	8
2	13
1	7
13	2
14	5
12	6
11	10
105	105

Рис.5.6 Перевірка суми рангів

5. Для кожної пари значень x_1 та $|u_i|$ розрахувати квадрат різниці за формулою:

$d^2 = (ранг(x_1) - ранг(|u_i|))^2$

=(РАНГ(I2;$I$2:$I$15)-РАНГ(J2;$J$2:$J$15))^2

6. Розрахувати коефіцієнт рангової кореляції Спірмена за формулою:

$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$, n – кількість пар спостережень.

7. Розрахувати t-статистику за формулою:

$$t_{розрах} = \frac{|\rho|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

8. Знайти $t_{крит}(\alpha;n-m-1)$; m=1 для розподілу Стьюдента (функція СТЬЮДРАСПОБР).

9. Порівняти $t_{розр}$ і $t_{крит}$. Якщо $t_{розр} > t_{крит}$, то гетероскедастичність присутня. В протилежному випадку – ні (рис. 5.7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	y	x1	x2	x3	Y_i	U_i	luiL		Ранг x1	Ранг luiL	d^2							Ui^2
2	33	43	48	425	32,98411	0,01589	0,01589		10	14	16							0,00025
3	35	49	45	485	35,6293	-0,6293	0,629299		9	9	0							0,39602
4	36	58	36	580	38,37896	-2,37896	2,378959		6	4	4							5,65945
5	39	56	40	550	39,08529	-0,08529	0,085294		8	12	16							0,00728
6	40	62	44	610	42,72003	-2,72003	2,720027		5	3	4							7,39855
7	42	57	37	560	39,17275	2,82725	2,82725		7	1	36							7,99334
8	43	63	41	620	42,80748	0,192517	0,192517		4	11	49							0,03706
9	45	69	46	700	44,25563	0,744369	0,744369		3	8	25							0,55408
10	47	71	42	700	47,04122	-0,04122	0,041219		2	13	121							0,00170
11	50	78	43	785	49,01745	0,982553	0,982553		1	7	36							0,96541
12	22	34	35	350	24,7965	-2,7965	2,796504		13	2	121							7,82044
13	26	32	33	325	24,07267	1,927329	1,927329		14	5	81							3,71460
14	30	38	43	385	28,55559	1,444414	1,444414		12	6	36							2,08633
15	32	42	41	415	31,48302	0,516981	0,516981		11	10	1							0,26727
16				.					105	105	546							
17																		
18									ρ= -0,2									
19									$t_{розрах}$= 0									
20									$t_{крит}$= 2,1788128									
21									t-розрах= 0	<$t_{крит}$	гетероскедастичність присутня							

Рис. 5.7 Виконання розрахунків для x_1

10. Виконати аналогічні розрахунки для змінних x_3 та x_2.

X2:

Ранг x2	Ранг luiL	d^2
1	14	169
3	9	36
12	4	64
10	12	4
4	3	1
11	1	100
8	11	9
2	8	36
7	13	36
5	7	4
13	2	121
14	5	81
5	6	1
8	10	4
103	105	666
ρ=	-0,46374	
$t_{розрах}$=	1,81318	
$t_{крит}$=	2,178813	
t-розрах=	<$t_{крит}$	гетероскедастичність присутня

Рис. 5.8 Розрахунки для x_2

ρ= -0,2

$t_{розрах}$=1,81318

$t_{крит}$= 2,1788128

$t_{розрах}$<$t_{крит}$ гетероскедастичність присутня

X3:

I	J	K	L	M
Ранг x3	Ранг luiL	d^2		
10	14	16		
9	9	0		
6	4	4		
8	12	16		
5	3	4		
7	1	36		
4	11	49		
2	8	36		
2	13	121		
1	7	36		
13	2	121		
14	5	81		
12	6	36		
11	10	1		
104	105	557		
ρ=	-0,22418			
t-розрах=	0,79685			
$t_{крит}$=	2,178813			
t-розрах=	<$t_{крит}$	гетероскедастичність присутня		

Рис. 5.9 Розрахунки для x3

ρ= -0,224175824

$t_{розрах}$= 0,79685

$t_{крит}$= 2,17881283

$t_{розрах}$ <$t_{крит}$ гетероскедастичність присутня

Завдання 5.2.

Використання автокореляції методом Дарбіна-Уотсона.

Необхідно:

Перевірити модель, побудовану у попередній лабораторній роботі, на автокореляцію методом Дарбіна-Уотсона (для змінної X_1).

Хід виконання завдання

1. Розрахувати величини $(u_t - u_{t-1})^2$ та u_t^2.

2. Розрахувати статистику $DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}$.

3. Знайти критичні значення $DW1$ і $DW2$ статистики Дарбіна-Уотсона для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$, трьох незалежних змінних і 14 наборів вхідних значень ($DW1 = 0.774$ і $DW2 = 1.774$).

4. Нанести отримані числові значення на відрізок [0, 4] і зробити висновок стосовно наявності або відсутності автокореляції (рис. 5.10).

$$(u_t - u_{t-1})^2$$

$$\sum_{t=1}^{n} u_t^2$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}$$

DW=2,521651

Так як розрахункове значення потрапило в зону невизначенності, ми не можемо зробити висновок стосовно наявності або відсутності автокореляції. Потрібно застосовувати інші, більш потужні критерії.

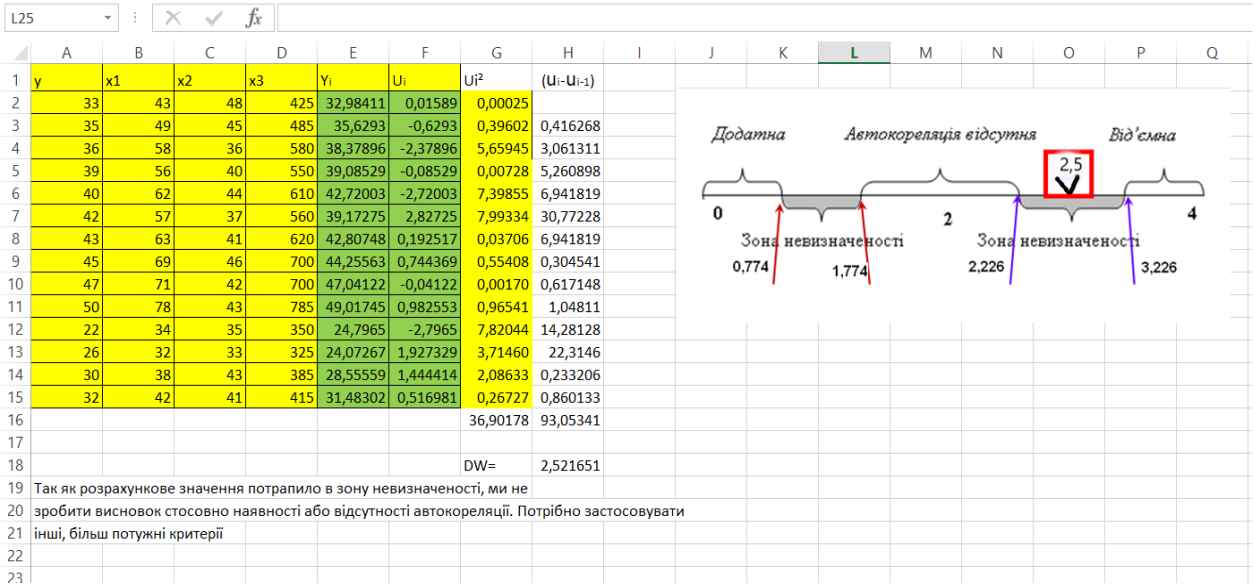


Рис 5. Результат розрахунків

Тема 6. Автокореляція в економетричних моделях

Лабораторна робота 6. Дослідження економетричної моделі на наявність автокореляції.

Мета: перевірити модель, побудовану у попередній лабораторній роботі, на автокореляцію методом Дарбіна-Уотсона.

Завдання:

Ознайомитися з методами перевірки економетричної моделі на наявність автокореляції.

Необхідно:

Для моделей, що побудовані у попередній лабораторній роботі №4:

1. Перевірити наявність автокореляції графічним методом (побудувати два види графіків: послідовно-часовий графік (рис.1), графік залежності u_i від u_{i-1} (рис.2));
2. Перевірити наявність автокореляції методом Дарбіна-Уотсона.

Хід виконання завдання

1 Розрахувати величини $(u_t - u_{t-1})^2$ та u_t^2.

2 Розрахувати статистику $DW_{розр} = d = \frac{\sum_{i=2}^{n}(u_i - u_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

3. Знайти критичні значення *DW1* і *DW2* статистики Дарбіна-Уотсона для рівня значущості α=0,05, трьох незалежних змінних:

   а) для 12 наборів вхідних значень (DW1=0,67 і DW2=1,833);

   б) для 21 набору вхідних значень (DW1=1,028 і DW2=1,673).

4. Нанести отримані числові значення на відрізок [0,4] і зробити висновок стосовно наявності або відсутності автокореляції (рис. 6.3).

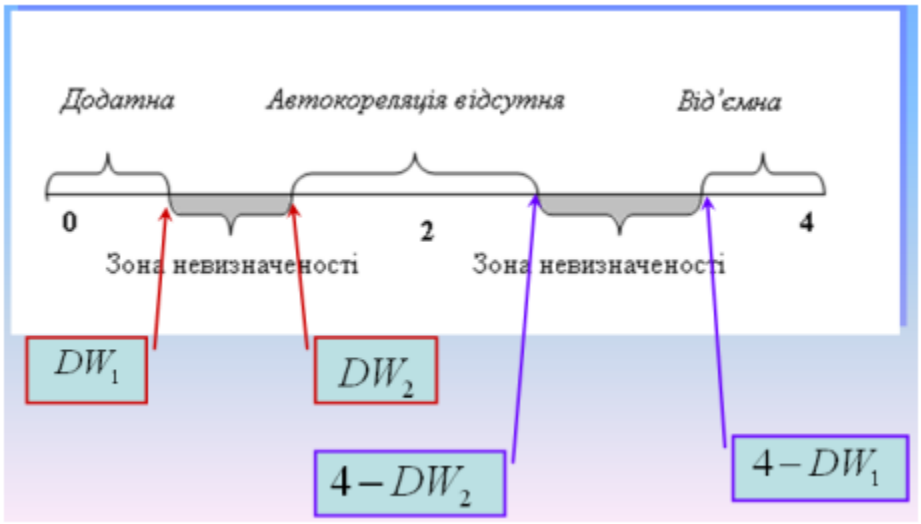


Рис. 6.3 Формування відрізку

Приклади розрахунків для рисунку 6.1, рисунку 6.2, та рисунку 6.4.

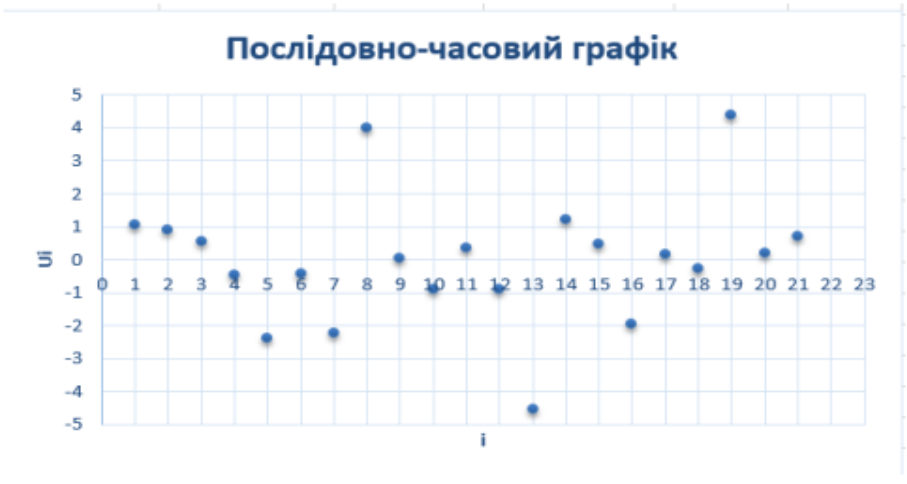


Рис. 6.1 Результат побудови послідовно-часового графіка



Рис. 6.2 Результат побудови графіка залежності u_i від u_{i-1}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	y	x1	x2	x3	Y	u_i	u_i^2	$(u_i-u_{i-1})^2$
2	33	55	33	50	33,17709	-0,17709	0,031361	
3	32	46	42	45	31,85947	0,140533	0,019749	0,100885
4	30	40	45	39	29,07224	0,92776	0,860739	0,619727
5	29	39	38	40	28,77997	0,220031	0,048414	0,50088
6	27	35	40	34	25,78083	1,219174	1,486385	0,998286
7	23	29	30	30	22,45547	0,544532	0,296515	0,455141
8	19	31	32	30	22,63104	-3,63104	13,18447	17,43542
9	47	75	40	74,5	47,23085	-0,23085	0,053293	11,56128
10	44	68	39	69	44,2536	-0,2536	0,064312	0,000517
11	42	66	43	66	43,14152	-1,14152	1,303058	0,788399
12	40	60	38	59	38,75049	1,249513	1,561283	5,717018
13	39	54	34	54,5	35,91486	3,08514	9,518087	3,369525
14	37	59	41	60	39,74985	-2,74985	7,561666	34,04708
15	36	53	37	52,5	35,20274	0,797265	0,635631	12,58201
16							36,62496	88,17618
17								
18							DW=	2,407543
19	Так як розрахункове значення потрапило в зону невизначеності, ми не можемо							
20	зробити висновок стосовно наявності або відсутності автокореляції. Потрібно застосовувати							
21	інші, більш потужні критерії							



Рис. 6.4 Загальний вигляд роботи

Тема 7. Модель Коба-Дугласа

Лабораторна робота 7. Нелінійна багатофакторна модель Коба-Дугласа.

Мета: навчитися будувати нелінійні багатофакторні моделі засобами MS Excel

Завдання:

Необхідно:

За даними Вашого варіанту (Додаток 1):

1. побудувати виробничу функцію Коба-Дугласа;
2. оцінити її якість (коефіцієнт детермінації, статистична значущість рівняння в цілому та окремих його параметрів);
3. дати економічну інтерпретацію отриманим результатам:

а) ступеня однорідності виробничої функції і величини віддачі;

б) середньої продуктивності праці;

в) середньої продуктивності виробничих фондів;

г) граничної ефективності праці;

д) граничної ефективності виробничих фондів;

є) еластичності праці;

е) еластичності виробничих фондів;

ж) граничної норми заміщення ресурсів;

4. розрахувати прогнозні значення показників функції Коба-Дугласа за умов, що основний капітал зросте на 2%, а витрати праці знизяться на 3%.

Пояснення до виконання

Виробнича функція – це така економетрична модель, яка враховує вплив ресурсів виробництва на величину валової продукції.

На практиці широке застосування одержала функція Коба-Дугласа:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

де Y – обсяг виробленого продукту;

K і L – відповідно капітал і праця;

α і β – коефіцієнти еластичності відповідно капіталу і праці, що характеризують зростання обсягу продукту на 1% зростання капіталу чи праці;

А – коефіцієнт пропорційності або масштабності, який дозволяє порівнювати обсяг продукту різного періоду (він фактично відображає середньорічний темп зростання продукту).

Функція Кобба-Дугласа шляхом логарифмування легко зводиться до лінійної функції:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$\ln Y = \ln(AK^{\alpha}L^{\beta});\ \ln Y = \ln A + \ln(K^{\alpha}) + \ln(L^{\beta});\ \ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$$

Зробимо заміни: $Y^{'} = \ln Y$, $a_0 = \ln A$, $K^{'} = \ln K$, $L^{'} = \ln L$.У результаті маємо звичайну багатофакторну лінійну модель:

$$Y^{'} = a_0 + \alpha K^{'} + \beta L^{'}$$

Отже, перш ніж будувати модель, необхідно прологарифмувати вхідні дані (рис. 7.1).

	A	B	C	D	E	F
1	Обсяг продукції, тис. у.о. (Y)	Обсяг капіталу, тис. у.о. (K)	Обсяг витрат праці, тис. у.о. (L)	Y'	K'	L'
2	510	305	92	6,23441073	5,720312	4,521789
3	565	326	100	6,33682573	5,786897	4,60517
4	612	348	112	6,41673228	5,852202	4,718499
5	632	398	128	6,44888939	5,986452	4,85203
6	653	400	143	6,48157713	5,991465	4,962845
7	705	440	159	6,5581978	6,086775	5,068904
8	708	490	162	6,56244409	6,194405	5,087596
9	742	520	177	6,60934924	6,253829	5,17615
10	772	527	133	6,64898455	6,267201	4,890349
11	822	544	200	6,7117404	6,298949	5,298317
12	861	590	238	6,7580945	6,380123	5,472271
13	923	600	260	6,82762923	6,39693	5,560682
14	1015	648	271	6,92264389	6,473891	5,602119
15	1093	668	290	6,99668149	6,504288	5,669881
16	1104	675	310	7,00669523	6,514713	5,736572

Рис. 7.1 Логарифмування вхідних даних

Для побудови багатофакторної лінійної регресії використати інструмент «Анализ данных» (рис. 7.2).

	A	B	C	D	E	F	G
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,98					
5	R-квадрат	0,96					
6	Нормированный R-квадрат	0,96					
7	Стандартная ошибка	0,05					
8	Наблюдения	15					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	2	0,74950922	0,37475461	163,17604	0,00	
13	Остаток	12	0,027559532	0,002296628			
14	Итого	14	0,777068752				
15							
16		*Коэф-фициенты*	*Стандарт-ная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	2,30	0,50	4,63	0,00	1,21	3,38
18	K'	0,47	0,16	2,93	0,01	0,12	0,82
19	L'	0,28	0,11	2,60	0,02	0,05	0,51

Рис. 7.2 Результати застосування інструменту «Анализ данных»

Дана модель є якісною, що підтверджується статистичною значущістю рівняння в цілому та статистичною значущістю всіх параметрів регресії (детальне пояснення сформулювати самостійно).

Для запису функції Коба-Дугласа в початковому вигляді слід здійснити зворотне перетворення: $A = e^{a_0}$ (рис. 7.3). Всі коефіцієнти виробничої функції визначено на (рис. 7.4.).

	Коэф-фициенты	Станда ная ошиб
Y-пересечение	2,30	
K'	0,47	
L'	0,28	
A=	=exp(B17)	
α=	0,47	
β=	0,28	

Рис. 7.3 Розрахунок параметру А

	Коэф-фициенты	Стандарт-ная ошибка
Y-пересечение	2,30	0,50
K'	0,47	0,16
L'	0,28	0,11
A=	9,93	
α=	0,47	
β=	0,28	

Рис. 7.4 Параметри ф-ції Коба-Дугласа

Отже, функція Коба-Дугласа матиме вигляд $Y = 9.93K^{0.47}L^{0.28}$.

Пояснення щодо економічної інтерпретації отриманих результатів

Ступінь однорідності виробничої функції і величина віддачі (сумарна еластичність)

Ступінь однорідності (сумарна еластичність) виробничої функції визначається сумою α + β. Сумарна еластичність по витратах показує ефект одночасного пропорційного збільшення обсягів ресурсів праці і основних фондів.

Так, класичний варіант функції Коба-Дугласа α + β = 1, (статична функція – постійна віддача ресурсів). У разі, коли α + β > 1 або α + β < 1 – маємо динамічну мультиплікативну виробничу функцію Коба-Дугласа. Якщо α + β > 1, то віддача збільшується, тобто темпи росту обсягу продукції вищі за темпи росту виробничих ресурсів. Якщо α + β < 1, то, навпаки, віддача зменшується і темпи росту продукції нижчі за темпи росту ресурсів.

Виходячи з цього, можна дати таку економічну інтерпретацію: якщо α + β = 1, то при зростанні витрат у *k* разів випуск збільшиться також у *k* разів. Якщо α + β > 1, то при зростанні витрат у *k* разів випуск збільшиться більше ніж у *k* разів. Якщо α + β < 1, то при зростанні витрат у *k* разів випуск зросте менше ніж у *k* разів.

Пояснення до результатів прикладу: $\alpha + \beta = 0{,}47 + 0{,}28 = 0{,}75 < 1$, віддача зменшується і темпи росту продукції менші за темпи росту ресурсів.

Середня продуктивність виробничих фондів μ_K *та середня продуктивність праці* μ_L

Середня продуктивність виробничих фондів (фондовіддача, капіталовіддача) показує обсяг продукції в розрахунку на одиницю використовуваних виробничих фондів.

Продуктивність праці вимірюється як загальний обсяг продукції, поділений на кількість витраченого на його виробництво труда. Це середня величина, яка відображує виробіток одного працівника за одиницю часу.

Означені показники розраховуються для кожного набору даних за формулами:

$$\mu_K = \frac{Y}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = AK^{\alpha-1}L^{\beta},$$

$$\mu_L = \frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = AK^{\alpha}L^{\beta-1}.$$

Результат оформлюється у вигляді, зображеному на (рис. 7.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Обсяг продукції, тис. у.о. (Y)	Обсяг капіталу, тис. у.о. (K)	Обсяг витрат праці, тис. у.о. (L)	Y'	K'	L'	μK	μL
2	510	305	92	6,23441073	5,720312	4,521789	1,688179	5,596679
3	565	326	100	6,33682573	5,786897	4,60517	1,667925	5,437436
4	612	348	112	6,41673228	5,852202	4,718499	1,66284	5,166683
5	632	398	128	6,44888939	5,986452	4,85203	1,607313	4,997738
6	653	400	143	6,48157713	5,991465	4,962845	1,65328	4,624559
7	705	440	159	6,5581978	6,086775	5,068904	1,618959	4,480138
8	708	490	162	6,56244409	6,194405	5,087596	1,537183	4,649504
9	742	520	177	6,60934924	6,253829	5,17615	1,526713	4,485259
10	772	527	133	6,64898455	6,267201	4,890349	1,399978	5,547281
11	822	544	200	6,7117404	6,298949	5,298317	1,542217	4,194831
12	861	590	238	6,7580945	6,380123	5,472271	1,550595	3,843912
13	923	600	260	6,82762923	6,39693	5,560682	1,575146	3,634953
14	1015	648	271	6,92264389	6,473891	5,602119	1,529746	3,657843
15	1093	668	290	6,99668149	6,504288	5,669881	1,533971	3,533423
16	1104	675	310	7,00669523	6,514713	5,736572	1,554112	3,383954

Рис. 7.5 Розрахунок середньої ефективності

У наведеному прикладі для першого року $\mu_K = 1{,}688179$, $\mu_L = 5{,}596679$ Це пояснюється таким чином:

- на 1 у.о. виробничих фондів приходиться 1,688179 у.о. обсягу виробленої продукції;
- при використанні 1 у.о. працезатрат отримуємо 5,596679 у.о. обсягу виробленої продукції.

Це багато чи мало? При аналізі діяльності підприємства (галузі, країни тощо) нас буде цікавити динаміка зміни середньої ефективності використання ресурсу. За даними прикладу, середня ефективність використання обох ресурсів спадає, що не є гарною тенденцією. В цілому, середня ефективність від праці вища за середню ефективність виробничих фондів.

Гранична продуктивність виробничих фондів ν_K та гранична продуктивність праці ν_L

Гранична продуктивність виробничих фондів (фондовіддача, капіталовіддача) показує, скільки додаткових одиниць продукції приносить додаткова одиниця основних фондів.

Гранична продуктивність праці означає показує, скільки додаткових одиниць продукції приносить додаткова одиниця праці.

Наведені показники обчислюються на формулами:

$$\nu_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta},$$

$$\nu_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}.$$

Результат розрахунків оформлюється у вигляді, зображеному на (рис. 7.6).

E	F	G	H	I	J
K'	L'	μK	μL	νK	νL
5,720312	4,521789	1,688179	5,596679	0,793568	1,558265
5,786897	4,60517	1,667925	5,437436	0,784047	1,513927
5,852202	4,718499	1,66284	5,166683	0,781657	1,438543
5,986452	4,85203	1,607313	4,997738	0,755555	1,391504
5,991465	4,962845	1,65328	4,624559	0,777163	1,287601
6,086775	5,068904	1,618959	4,480138	0,76103	1,24739
6,194405	5,087596	1,537183	4,649504	0,722589	1,294546
6,253829	5,17615	1,526713	4,485259	0,717667	1,248816
6,267201	4,890349	1,399978	5,547281	0,658093	1,544511
6,298949	5,298317	1,542217	4,194831	0,724956	1,167953
6,380123	5,472271	1,550595	3,843912	0,728894	1,070248
6,39693	5,560682	1,575146	3,634953	0,740435	1,012068
6,473891	5,602119	1,529746	3,657843	0,719093	1,018441
6,504288	5,669881	1,533971	3,533423	0,721079	0,983799
6,514713	5,736572	1,554112	3,383954	0,730547	0,942183

Рис. 7.6 Розрахунок граничної ефективності

У наведеному прикладі для першого року $\nu_K = 0{,}793568$, $\nu_L = 1{,}558265$. Це пояснюється таким чином:

- використання додаткової одиниці виробничих фондів дає 0,793586 одиниці виробленої продукції;
- використання додаткової одиниці праці дає 1,558265 одиниць виробленої продукції.

Як бачимо з наведених розрахунків (рис. 6), гранична ефективність виробничих фондів на даному підприємстві у досліджуваний період менша за граничну ефективність праці. Це означає, що збільшувати обсяг трудового капіталу вигідніше, ніж обсяг виробничих ресурсів.

Еластичність випуску продукції за обсягом виробничих фондів δ_K *та за обсягом праці* δ_L

Еластичність випуску продукції за обсягом виробничих фондів показує, на скільки відсотків збільшиться випуск продукції при збільшенні основних фондів на 1%.

Еластичність випуску продукції за обсягом праці показує на скільки відсотків збільшиться випуск продукції при збільшенні праці на 1%.

Для виробничої функції Коба-Дугласа $\delta_K = \alpha$, $\delta_L = \beta$.

Для наведеного прикладу $\delta_K = \alpha = 0{,}47$, тобто збільшення виробничих фондів на 1% призведе до збільшення випуску продукції на 0,47%. Відповідно $\delta_L = \beta = 0{,}28$, отже збільшення праці на 1% призведе до збільшення випуску продукції на 0,28%.

Гранична норма заміщення ресурсів γ_{KL}

У матеріальному виробництві велике значення набуває поняття ***взаємозамінності ресурсів.*** У теорії виробничих функцій можливості заміщення ресурсів характеризують виробничу функцію з точки зору різних комбінацій затрат ресурсів, що приводять до одного і того ж рівня випуску продукту. Пояснимо це на умовному прикладі. Нехай виробництво певної кількості сільгосппродукції вимагає 10 працівників та 2 т добрив, а при внесенні в ґрунт тільки 1 т добрив потрібно вже 12 працівників для отримання того ж врожаю. Тут 1 т добрив (перший ресурс) замінюється працею двох працівників (другий ресурс).

Гранична норма заміщення (еквівалентного заміщення) витрат праці витратами виробничих фондів (капіталу) обчислюється за формулою:

$$\gamma_{KL} = \frac{\nu_L}{\nu_K} = \frac{\beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}}{\alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}} = \frac{\beta K}{\alpha L}.$$

Гранична норма заміщення (еквівалентного заміщення) витрат виробничих фондів (капіталу) витратами праці обчислюється за формулою:

$$\gamma_{LK} = \frac{\nu_K}{\nu_L} = \frac{\alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}}{\beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}} = \frac{\alpha L}{\beta K}.$$

Відповідні розрахунки наведено на (рис. 7.7).

I	J	K	L
vK	vL	γKL	γLK
0,793568	1,558265	1,963618	0,509263901
0,784047	1,513927	1,930913	0,517889736
0,781657	1,438543	1,840375	0,54336753
0,755555	1,391504	1,841697	0,54297746
0,777163	1,287601	1,656796	0,603574593
0,76103	1,24739	1,639082	0,61009765
0,722589	1,294546	1,791539	0,558179444
0,717667	1,248816	1,740104	0,574678338
0,658093	1,544511	2,346951	0,426084691
0,724956	1,167953	1,611068	0,620706081
0,728894	1,070248	1,468318	0,681051337
0,740435	1,012068	1,366857	0,731605568
0,719093	1,018441	1,416286	0,706072325
0,721079	0,983799	1,364343	0,732953528
0,730547	0,942183	1,289695	0,775376841

Рис. 7.7 Розрахунок граничних норм заміщення

Як видно з розрахунків, для першого року $\gamma_{KL} = 1{,}963618$, тобто для незмінності обсягу випуску продукції скорочення 1 у.о. праці потребує збільшення виробничих фондів на 1,963618 у.о. І навпаки, $\gamma_{LK} = 0{,}509263901$, отже, для незмінності обсягу випуску продукції зменшення 1 у.о. виробничих фондів потребує збільшення використання праці на 0,509263901 у.о.

Розрахунок прогнозних значень показників виробничої функції Коба-Дугласа наведено на (рис. 7.8).

Як видно з прогнозних розрахунків, збільшення основних фондів на 2% та зменшення обсягу праці на 3% призведе до зростання випуску (1159 у.о. у порівнянні з 1104 у.о. попереднього року). При цьому середня продуктивність виробничих фондів продовжить знижуватися (1,52 у.о. у прогнозному періоді у порівнянні з 1,55 у.о. попереднього року), а середня продуктивність праці – зростати (3,49 у.о. прогнозному періоді у порівнянні з 3,38 у.о. попереднього року).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Обсяг продукції, тис. у.о. (Y)	Обсяг капіталу, тис. у.о. (K)	Обсяг витрат праці, тис. у.о. (L)	Y'	K'	L'	μK	μL	νK	νL	γKL	γLK
2	510	305	92	6,23441073	5,720312	4,521789	1,688179	5,596679	0,793568	1,558265	1,963618	0,509263901
3	565	326	100	6,33682573	5,786897	4,60517	1,667925	5,437436	0,784047	1,513927	1,930913	0,517889736
4	612	348	112	6,41673228	5,852202	4,718499	1,66284	5,166683	0,781657	1,438543	1,840375	0,54336753
5	632	398	128	6,44888939	5,986452	4,85203	1,607313	4,997738	0,755555	1,391504	1,841697	0,54297746
6	653	400	143	6,48157713	5,991465	4,962845	1,65328	4,624559	0,777163	1,287601	1,656796	0,603574593
7	705	440	159	6,5581978	6,086775	5,068904	1,618959	4,480138	0,76103	1,24739	1,639082	0,61009765
8	708	490	162	6,56244409	6,194405	5,087596	1,537183	4,649504	0,722589	1,294546	1,791539	0,558179444
9	742	520	177	6,60934924	6,253829	5,17615	1,526713	4,485259	0,717667	1,248816	1,740104	0,574678338
10	772	527	133	6,64898455	6,267201	4,890349	1,399978	5,547281	0,658093	1,544511	2,346951	0,426084691
11	822	544	200	6,7117404	6,298949	5,298317	1,542217	4,194831	0,724956	1,167953	1,611068	0,620706081
12	861	590	238	6,7580945	6,380123	5,472271	1,550595	3,843912	0,728894	1,070248	1,468318	0,681051337
13	923	600	260	6,82762923	6,39693	5,560682	1,575146	3,634953	0,740435	1,012068	1,366857	0,731605568
14	1015	648	271	6,92264389	6,473891	5,602119	1,529746	3,657843	0,719093	1,018441	1,416286	0,706072325
15	1093	668	290	6,99668149	6,504288	5,669881	1,533971	3,533423	0,721079	0,983799	1,364343	0,732953528
16	1104	675	310	7,00669523	6,514713	5,736572	1,554112	3,383954	0,730547	0,942183	1,289695	0,775376841
17	Прогноз											
18	1058,836332	688,5	300,7				1,524901	3,491502	0,716816	0,972127	1,356175	0,737368172

Рис. 7.8 Прогнозні значення показників функції Коба-Дугласа

Аналогічна тенденція спостерігається і для граничної продуктивності ресурсів. Відповідно норма заміщення капіталу працею зросте (1,36 у прогнозному періоді у порівнянні з 1,29 попереднього року), а норма заміщення праці капіталом зменшиться (0,74 у прогнозному періоді у порівнянні з 0,78 попереднього року).

Рекомендована література

Базова

1. Диха М. В. Економетрія: навчальний посібник / М. В. Диха, В. С. Мороз – К. : «Центр учбової літератури», 2019. – 206 с.
2. Козьменко О.В. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика) : навчальний посібник / О.В. Козьменко, О.В. Кузьменко. - Суми : Університетська книга, 2020. - 406 с.
3. Кузьмичов А.І. Економетрія: посібник / А.І. Кузьмичов. – Київ : Ліра, 2020. – 212 с.
4. Лугінін, О.Є. Економетрія [Текст]: навч. посіб., 2-ге вид., перероб. та доп. / О.Є. Лугінін. – К.: ЦУЛ, 2008. – 278 с.
5. Прикладна економетрика : навч. посіб. : у двох частинах. Частина 1 : [Електронне видання] / Л. С. Гур'янова, Т. С. Клебанова, С. В. Прокопович та ін. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 235 с.

Допоміжна

1. Perkhun L. A study of the effect of various types of tax receipts on general revenues of Ukraine’s regions // Scientific letters of academic society of Michal Baludansky, Volume 4, No 4/2016 – P. 25-28.
2. Perkhun L. Typology of Ukraine region on the basis of the financial independence level // Economics, management, law: socio-economic aspects of development: Collection of scientific articles. Vol 1. – Edizioni Magi, Italy, 2016. – С. 326-329.
3. Економетрія (вікіпедія) [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F

4. Назаренко, О.М. Основи економетрики : підручник, 2-е вид., випр. / О.М. Назаренко. – К.: ЦНЛ, 2005. – 392с.
5. Перхун Л.П. Вплив податкової реформи в Україні на конкурентоспроможність регіонів // Детермінанти соціально-економічного розвитку підприємства: монографія. Вип 3. / за наук. ред. Строченко Н.І., Пилипенко В.В., Ковальової О.М. – Суми, Сумський національний аграрний університет, 2016, С. 278-284.
6. Присенко Г. В. Прогнозування соціально-економічних процесів : навч. посібн. / Г. В. Присенко, Є. І. Равікович. – К. : КНЕУ, 2005. – 378 с.
7. Ставицький О. В. Використання економетричного інструментарію виробничих функцій в економічному аналізі діяльності промислових підприємств *Ефективна економіка*. 2022. №8 [Електронний ресурс] URL: https://nayka.com.ua/index.php/ee/article/view/443/446
8. Кухаренко В. М. , Перхун Л. П. , Товмаченко Н. М. Методика комплексного оцінювання якості тестів. Частина 1 // Статистика України. 2018. № 3. С 40–48.
9. Кухаренко В. М., Перхун Л. П., Товмаченко Н. М. Методика комплексного оцінювання якості тестів. Частина 2 // Статистика України. 2018. № 4. С. 72–79.
10. Черняк О.І., Ставицький А.В. Динамічна економетрика. – К.: КВІЦ, 2000. – 120 с.

Інформаційні ресурси

1. Офіційний сайт Державної служби статистики [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://www.ukrstat.gov.ua/
2. Світовий банк даних [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://worlddata.ai/
3. Офіційний сайт Євростату [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://ec.europa.eu/eurostat/home?

Додаток 1

Варіанти завдань для лабораторної роботи №7

Варіант 1

№	Обсяг капіталу, тис. у.о.	Обсяг витрат праці, тис. у.о.	Обсяг продукції, тис. у.о.
1.	9,244	3,412	7,843
2.	14,132	3,793	8,982
3.	17,773	3,527	8,878
4.	19,512	3,862	9,945
5.	20,564	3,621	10,445
6.	18,035	3,953	9,532
7.	18,871	3,742	9,657
8.	21,148	4,013	11,032
9.	20,317	3,837	10,457
10.	19,143	4,132	10,117
11.	18,035	3,973	9,542
12.	18,834	3,774	9,659
13.	22,148	4,025	11,042
14.	20,521	3,841	10,457
15.	19,147	4,138	10,128
Прогноз	***23,153***	***4,252***	

Варіант 2

№	Працезатрати, тис. люд.-дні	Основні засоби, тис. грн	Обсяг виробництва, млн грн
1.	21,2	52,1	69,6
2.	23,5	57,2	75,8
3.	24,4	60,6	79,9
4.	24,9	65,7	84,7
5.	27,1	69,8	89,1
6.	28,5	74,6	95,5
7.	31,2	77,7	99,7
8.	33,1	78,1	103,2
9.	33,6	83,1	107,6
10.	34,9	86,8	111,8
11.	35,3	89,3	114,4
12.	36,4	94,5	120,8
13.	37,3	97,1	122,9
14.	33,7	82,1	106,5
15.	35,9	86,7	113,8
Прогноз	***39,4***	***100,4***	

Варіант 3

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	1,3	2,2	2,15
2.	2,1	2,6	4,41
3.	2,6	3,3	5,54
4.	3,1	3,6	6,69
5.	4,2	4,6	7,48
6.	4,6	5,2	9,56
7.	5,3	5,8	10,62
8.	5,7	6,2	11,94
9.	6,8	7,5	12,02
10.	8,4	10,8	18,51
11.	8,6	11,2	19,56
12.	9,3	12,8	21,62
13.	9,7	12,9	21,94
14.	10,8	13,5	22,02
15.	13,4	15,8	25,51
Прогноз	***14,7***	***16,1***	

Варіант 4

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	861,3	579,3	867,2
2.	894,8	682,7	911,4
3.	822,9	424,4	778,6
4.	908,9	715,9	944,6
5.	946,5	904,1	977,9
6.	840,6	494,5	826,6
7.	878,2	627,3	896,7
8.	899,3	686,3	933,6
9.	902,6	693,7	941
10.	886,7	660,5	904,1
11.	849,1	546,1	845
12.	831,4	457,6	797
13.	873,4	612,5	885,6
14.	896,7	682,7	918,8
15.	911,4	738	955,7
Прогноз	***921,7***	***748***	

Варіант 5

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	3,15	2,11	1,8897
2.	3,26	2,14	1,9475
3.	3,31	2,16	2,0622
4.	3,37	2,19	2,1233
5.	3,49	2,22	2,2250
6.	3,56	2,24	2,2994
7.	3,60	2,26	2,3615
8.	3,62	2,29	2,4209
9.	3,64	2,32	2,4825
10.	3,70	2,33	2,5466
11.	3,75	2,35	2,6190
12.	3,80	2,37	2,6930
13.	3,93	2,39	2,8049
14.	3,98	2,43	2,8891
15.	4,00	2,45	2,9527
Прогноз	***4,15***	***2,55***	

Варіант 6

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	3,15	2,11	3,6428
2.	4,48	2,11	3,5797
3.	4,33	2,03	3,5845
4.	4,15	1,93	3,2592
5.	3,68	1,87	3,0462
6.	3,65	1,84	2,8993
7.	3,42	1,77	2,9696
8.	3,17	1,76	2,9982
9.	3,08	1,77	2,9469
10.	3,06	1,81	3,0409
11.	2,99	1,87	3,1314
12.	2,88	1,90	3,2627
13.	2,87	1,96	3,4917
14.	2,95	2,05	3,5209
15.	3,03	2,07	3,2592
Прогноз	***3,07***	***2,10***	

Варіант 7

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	4,14	2,48	3,0836
2.	4,17	2,51	3,1631
3.	4,21	2,54	3,2499
4.	4,25	2,52	3,3032
5.	4,33	2,51	3,3812
6.	4,40	2,47	3,4322
7.	4,44	2,40	3,4731
8.	4,54	2,36	3,5286
9.	4,60	2,28	3,5448
10.	4,63	2,26	3,5935
11.	4,67	2,18	3,6144
12.	4,75	2,13	3,5422
13.	4,48	2,11	3,6428
14.	4,33	2,03	3,4915
15.	4,21	1,98	3,3157
Прогноз	***4,75***	***2,19***	

Варіант 8

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	3,56	2,24	2,2994
2.	3,60	2,26	2,3615
3.	3,62	2,29	2,4209
4.	3,75	2,35	2,6190
5.	3,80	2,37	2,6930
6.	3,93	2,39	2,8049
7.	4,14	2,48	3,0836
8.	4,17	2,51	3,1631
9.	4,21	2,54	3,2499
10.	4,39	2,47	3,4322
11.	4,46	2,40	3,4731
12.	4,54	2,36	3,5286
13.	4,63	2,26	3,5935
14.	4,67	2,18	3,6144
15.	4,75	2,13	3,5422
Прогноз	***4,79***	***2,17***	

Варіант 9

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	4,15	1,93	3,5845
2.	3,95	1,91	3,1942
3.	3,69	1,87	3,2592
4.	3,65	1,84	3,0462
5.	3,60	1,81	3,1876
6.	3,42	1,77	2,8993
7.	3,17	1,76	2,9696
8.	3,12	1,76	2,8712
9.	3,08	1,77	2,9982
10.	3,06	1,81	2,9469
11.	2,98	1,84	3,0698
12.	2,99	1,87	3,0409
13.	2,88	1,90	3,1314
14.	2,81	1,93	3,0480
15.	2,87	1,97	3,1239
Прогноз	***2,89***	***1,99***	

Варіант 10

№	Обсяг капіталу, млн грн	Основні трудові ресурси, тис. чол.	Обсяг продукції, млн грн
1.	3,03	2,07	3,5209
2.	3,11	2,13	3,5827
3.	3,15	2,11	1,8897
4.	3,31	2,16	2,0622
5.	3,37	2,19	2,1233
6.	3,56	2,24	2,2994
7.	3,60	2,26	2,3615
8.	3,62	2,29	2,4209
9.	3,75	2,35	2,6190
10.	3,80	2,37	2,6930
11.	3,93	2,39	2,8049
12.	3,98	2,43	2,8891
13.	4,14	2,48	3,0836
14.	4,17	2,51	3,1631
15.	4,21	2,54	3,2499
Прогноз	***4,23***	***2,57***	